

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 10 (Abgabe 02.07.2015)

Aufgabe 43 (10 Zusatzpunkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ positiv definit und $K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \cdot (A\vec{x}) \leq 1\}$. Bestimmen Sie $\int_K dV$.
HINWEIS: Laut Satz 24 existiert eine orthogonale Matrix U , so dass $U^T A U$ diagonal ist.
Die Transformation $\vec{y} = U^T \vec{x}$ bietet sich an.

Aufgabe 44 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Oberfläche des Torus T aus den Aufgaben 28 und 42.

Aufgabe 45 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Oberfläche des Sattels

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2, z = x^2 - y^2 \right\}$$

sowie den Fluss von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch S .

HINWEIS: Ebene Polarkoordinaten, $dx dy = r dr d\varphi$, sind hilfreich.

Aufgabe 46 (10 Punkte)

Sei $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $\vec{x} \mapsto \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, und sei K die Kugel mit Radius R .

- Bestimmen Sie $\int_{\partial K} \vec{f} d\vec{O}$ (ohne Verwendung eines Integralsatzes).
- Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{f}$.
- Bestimmen Sie $\int_K \operatorname{div} \vec{f} dV$ für $\alpha < 3$.
- Bilden Sie den Limes $\alpha \rightarrow 3$ für $\operatorname{div} \vec{f}$ und berechnen Sie damit $\int_K \operatorname{div} \vec{f} dV$. Vergleichen Sie es mit dem Ergebnis aus a für $\alpha = 3$. Erklären Sie den scheinbaren Widerspruch.

Aufgabe 47 (10 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils den Fluss (von innen nach außen) der Vektorfelder $\vec{v}_1(\vec{x}) = \vec{x}$ und $\vec{v}_2(\vec{x}) = (-y^2, z, x)^T$ durch die Oberfläche des Torus T aus den Aufgaben 28, 42 und 47.

Aufgabe 48 (6 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 12.07.15 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- Separable differential equations* und
- Introduction to differential equations and initial value problems*.

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.