

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (Abgabe am 09.07.2015)

Aufgabe 49

(10 Punkte)

Berechnen Sie $\oint_{\mathfrak{K}} \vec{v} \, d\vec{x}$ für

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2y + \cos^2(x^2 + z^2) \\ \log(2 + y^2) - 5x \\ \tanh(x^2 + y^2 + z^2) \end{pmatrix}.$$

Dabei sei \mathfrak{K} der im Uhrzeigersinn durchlaufene Einheitskreis in der xy -Ebene.

Aufgabe 50 (Wiederholung: Summen, Reihen, Integrale)

(20 Zusatzpunkte)

Sei (für $p, \lambda, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$)

$$b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad f_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Berechnen Sie:

a) $\sum_{k=0}^n b(k; n, p), \quad \sum_{k=0}^n k b(k; n, p), \quad \sum_{k=0}^n k^2 b(k; n, p),$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} P(k; \lambda), \quad \sum_{k=0}^{\infty} k P(k; \lambda), \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(k; \lambda),$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu, \sigma^2}(x) \, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\mu, \sigma^2}(x) \, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\mu, \sigma^2}(x) \, dx,$

HINWEIS: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi},$

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu_1, \sigma_1^2}(y) f_{\mu_2, \sigma_2^2}(x-y) \, dy, \quad \text{ERGEBNIS: } f_{\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2}(x).$

Aufgabe 51

(10 Punkte)

a) Sei $\Omega = \{v, i, e, r\}$. Bestimmen Sie jeweils $\mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_j, \Omega)$ für $\mathcal{M}_1 = \{\{v\}\}, \mathcal{M}_2 = \{\{e\}, \{r\}\}$ und $\mathcal{M}_3 = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ mit } |A| = 2\}$.

b) Sei $\Omega = \mathbb{R}$, \mathcal{M}_1 die Menge aller offenen Intervalle (a, b) aus \mathbb{R} sowie \mathcal{M}_2 die Menge aller abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ aus \mathbb{R} .

Zeigen Sie: Die erzeugten σ -Algebren sind gleich³, d.h. $\mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_1, \Omega) = \mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_2, \Omega)$.

³Es handelt sich nämlich in beiden Fällen um die Borel- σ -Algebra über \mathbb{R} .

Aufgabe 52

(15 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 12.07.15 auf www.khanacademy.org die Skills

- *Basic set notation*,
- *Probability of rolling dice*,
- *Permutations*,
- *Combinations* und
- *Permutations and combinations*.

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.