

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Klausur am 28.07.2015

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 96 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\hat{=}$ 100% ($\hat{=}$ Note 1,0), 50% $\hat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\hat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

(4+8+8= 20 Punkte)

Sei $S_n = \int_0^\pi x^n \sin x \, dx$ ($n \in \mathbb{N}_0$).

- a) Berechnen Sie S_0 und S_1 . (Mit vollständigem Rechenweg!)
- b) Zeigen Sie: $S_n = \pi^n - (n^2 - n)S_{n-2} \, \forall n \geq 2$. HINWEIS: Partielle Integration.
Bestimmen Sie damit S_2 und S_3 .
- c) Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{3x+5}{(x+2)(x^2+3x+2)} \, dx. \quad \text{HINWEIS: Partialbruchzerlegung.}$$

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $xy' = y - xy$, $y(1) = e^{-1}$.

Aufgabe 3

(4+2+4 = 10 Punkte)

- a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ von $y'' + 2y' + 5y = 0$.
- b) Lösen Sie das AWP $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
- c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 2y' + 5y = \sin x$.

Aufgabe 4

(7+3+4 = 14 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren von A .
- b) Geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^T A U$.
- c) Sei $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, und $\vec{x}_n = A\vec{x}_{n-1} \, \forall n \geq 1$. Bestimmen Sie $\vec{x}_{15}$.

Aufgabe 5

(2+8 = 10 Punkte)

Wir suchen Extrema von $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ unter der Nebenbedingung $xy = 1$.

- Definieren Sie eine geeignete Lagrange-Funktion L .
- Leiten Sie aus L die Bestimmungsgleichungen für potentielle Extremstellen ab und lösen sie diese.

Aufgabe 6

(8 Punkte)

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f} d\vec{x}$ für

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ xy^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Aufgabe 7

(8 Punkte)

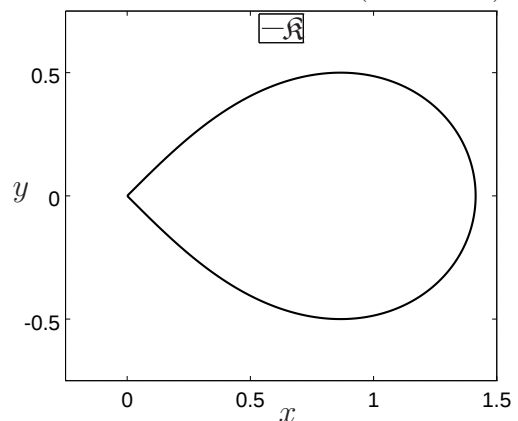
Berechnen Sie den Inhalt der von der Kurve

$$\mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2 \cos(2t)} \cos t \\ \sqrt{2 \cos(2t)} \sin t \end{pmatrix},$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{\pi}{4},$$

eingeschlossenen Fläche.

HINWEIS: Polarkoordinaten sind hilfreich.

**Aufgabe 8**

(4+2+4 = 10 Punkte)

Sei $\vec{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\vec{x}(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} x_1(q_1, q_2) \\ x_2(q_1, q_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 q_2 \\ \frac{1}{2}(q_2^2 - q_1^2) \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie, dass $\vec{x}$ für alle q_1, q_2 mit $q_1^2 + q_2^2 \neq 0$ lokal invertierbar ist – dort also krummlinige Koordinaten definiert werden.
- Wie lautet das Volumenelement $dV = dx_1 dx_2$ in diesen Koordinaten?
- Sei $K = \{\vec{x}(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq q_j \leq 1, j = 1, 2\}$. Berechnen Sie das Volumen $|K|$.

Aufgabe 9

(2+4+4 = 10 Punkte)

Wir nehmen in dieser Aufgabe an, dass Babies jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ männlich oder weiblich sind, und dass die Geburtswahrscheinlichkeiten an allen Wochentagen gleich sind (für Jungs wie für Mädchen).

- Ein Paar hat zwei Kinder. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das jüngere Kind ein Mädchen?
- Ein Paar hat zwei Kinder, von denen mindestens eines ein Mädchen ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das jüngere Kind ein Mädchen?
- Ein Paar hat zwei Kinder, von denen mindestens eines ein Mädchen ist, das an einem Donnerstag geboren wurde. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das jüngere Kind ein Mädchen, das an einem Donnerstag geboren wurde?