Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2015

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 08.10.2015

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 100 Punkte erreichbar, 82 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 41 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+6+8 = 18 Punkte)

Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ HINWEIS: Partielle Integration

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{7x+3}{(x^2-1)(x-1)}\,\mathrm{d}x$ HINWEIS: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y' = (1+x)^2\,(1+y^2)$, $y(0) = 0$.

Aufgabe 3 (4+2+4 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ von $y'' + 3y' = 0$.
b) Lösen Sie das AWP $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$.
c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 3y' = 7$

Aufgabe 4 (10+4+4 = 18 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
b) Geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, sodass gilt $D = U^T A\,U$.
c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}\,'(x) = A^2\,\vec{y}(x)$, $\vec{y}(0) = (1\ 1\ 0\ 1)^T$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Sei $f(x, y) = x \cos y$. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f, d.h. alle (x, y) mit $(\nabla f)(x, y) = 0$. Untersuchen Sie, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 6 (6+4 = 10 Punkte)
Berechnen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$ für $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ sowie

a) $\mathfrak{K}$: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t \sin t \end{pmatrix}$, $0 \le t < 2\pi$, und

b) $\mathfrak{K}$: die geradlinige Verbindung von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7 (8+2 = 10 Punkte)
Sei

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} |z| \le 2 \\ x^2 + y^2 - z^2 \le 1 \end{matrix} \right\} \qquad \text{und} \qquad \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} z^2 - x \\ x^3 + y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Volumen von $\mathcal{K}$, d.h. $\int_{\mathcal{K}} \mathrm{d}V$.
HINWEIS: Polarkoordinaten (in der xy-Ebene) sind hilfreich.

b) Bestimmen Sie den Betrag des Flusses von $\vec{v}$ durch $\partial\mathcal{K}$, d.h. $\left| \int_{\partial\mathcal{K}} \vec{v} \cdot \overbrace{\vec{n}\,\mathrm{d}O}^{\mathrm{d}\vec{O}} \right|$.

Aufgabe 8 (8 Punkte)
Sei

$$\mathcal{F} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+z^2}\cos\phi \\ \sqrt{1+z^2}\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} -1 \le z \le 2 \\ 0 \le \phi \le 2\pi \end{matrix} \right\}.$$

Berechnen Sie $\int_{\mathcal{F}} z\,\mathrm{d}O$.

Aufgabe 9 (2+4+4 = 10 Punkte)
Sie würfeln gleichzeitig mit einem roten und einem blauen Würfel (beide fair).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der rote Würfel ⚁ zeigt?

b) Mindestens ein Würfel zeige ⚁. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der rote Würfel ⚁ zeigt?

c) Mindestens ein Würfel zeige eine gerade Augenzahl. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der rote Würfel ⚁ zeigt?