

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 4 (Abgabe 12.05.2016)

Aufgabe 16

(keine Abgabe)

- a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \phi \in \mathbb{R}.$$

- b) Zeigen Sie: Ist $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär, und ist λ ein Eigenwert von U , so folgt $|\lambda| = 1$.

Aufgabe 17

(10 Punkte)

- a) Führen Sie die HAT für die Matrix B aus Aufgabe 13 durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix U mit zugehöriger Diagonalmatrix $D = \overline{U}^T B U$ an.
- b) Berechnen Sie e^{iCx} für $x \in \mathbb{R}$ und C aus Aufgabe 13.
HINWEIS: Bringen Sie die Matrix C mithilfe einer HAT in Diagonalform.

Aufgabe 18

(10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix U mit zugehöriger Diagonalmatrix $D = \overline{U}^T A U$ an.

Aufgabe 19

(4 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 05.06.16 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Separable differential equations* und
- *Introduction to differential equations and initial value problems*.

HINWEISE: Siehe Aufgabe 5 (Blatt 1)

Aufgabe 20

(10 Zusatzpunkte)

Man nennt

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dabei sind die Elemente von \vec{y} Funktionen von x , und \vec{y}' ist die komponentenweise Ableitung nach x , d.h.

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

- a) Rechnen Sie nach: Ist λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor \vec{u} , so ist

$$\vec{y}(x) = e^{\lambda x} \vec{u}$$

eine Lösung des DGL-Systems.

- b) Zeigen Sie: Jedes \vec{y} der Form

$$\vec{y}(x) = e^{Ax} \vec{b}, \quad \vec{b} \in \mathbb{C}^n \text{ beliebig,}$$

ist eine Lösung des DGL-Systems. Welchen Wert nimmt $\vec{y}(0)$ an?

- c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, mit A aus Aufgabe 13.