

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe ausnahmsweise bis spätestens **Mi, 25.05.2016, 12:00**
in die Mappen vor C6P43)

Aufgabe 21

(20 Punkte)

Bringen Sie die quadratischen Formen in den folgenden Gleichungen auf Hauptachsen, geben Sie an, was für Kegelschnitte die Gleichungen beschreiben, und zeichnen Sie sie.

a) $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 1$

b) $5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 8$

c) $9x^2 + 24xy + 16y^2 = 25$

d) $2x^2 + 12xy - 7y^2 = 5$

Aufgabe 22

(10 Punkte)

a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Zeigen Sie: $\det A = \prod_{j=1}^n \lambda_j$.

b) Gegeben sei die quadratische Form $(\vec{x} = (x, y, z)^T)$

$$q_A(\vec{x}) = x^2 + 10y^2 + z^2 - 4y(x + z) + 2axz, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Für welche Werte von a ist q_A positiv definit? Welche Definitheitseigenschaften hat q_A für andere Werte von a ?

Aufgabe 23

(10 Zusatzpunkte)

Sei $\vec{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten x, y, z . Wir möchten uns die folgende Menge veranschaulichen,

$$T := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

- a) Zeichnen Sie zunächst die Schnittmengen mit den drei Koordinatenebenen, z.B. ist $T_{xy} := \{\vec{x} \in T \mid z = 0\}$ die Schnittmenge mit der xy -Ebene.
- b) Zeichnen Sie nun $T \subset \mathbb{R}^3$.
- c) Erklären Sie kurz, wie Sie von den Ergebnissen in (a) zu der Zeichnung in (b) gelangt sind.

HINWEIS: Wenn Sie in (a) die Gleichung, die ein Punkt erfüllen muss, damit er sowohl in T als auch in einer Koordinatenebene liegt, etwas umstellen, kommen stets Kreise zum Vorschein.

Aufgabe 24

(keine Abgabe)

Schreiben Sie die DGL 2. Ordnung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (*)$$

um auf ein DGL-System 1. Ordnung. Definieren Sie dazu

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix},$$

und suchen Sie eine Matrix A , so daß $\vec{y}' = A\vec{y}$ äquivalent zu $(*)$ wird. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und vergleichen Sie mit dem charakteristischen Polynom der DGL $(*)$.

BEMERKUNG: Das Umschreiben auf ein System funktioniert analog für DGLn beliebiger Ordnung (auch nichtlineare), sehen Sie wie?