

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe 02.06.2016)

Aufgabe 25

(10 Punkte)

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = e^{xyz} + (x - y) \cos(xz)$, $\vec{x} = (x, y, z)^T$.

- Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_x , f_y und f_z .
- Ist f total differenzierbar? Geben Sie ∇f an.
- Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{x}_0 = (1, 1, 1)^T$ in Richtung von $(3, 4, 0)^T$.
- Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Ursprung in Richtung von $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Aufgabe 26

(10 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \quad x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & , \quad x = y = 0 \end{cases}.$$

- Zeigen Sie: Die Funktion f ist stetig. HINWEIS: $|xy| \leq x^2 + y^2$ (warum?)
- Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f (für $\vec{x} \neq \vec{0}$).
- Berechnen Sie alle Richtungsableitungen von f in $\vec{0}$.
- Ist f im Ursprung total differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 27

(10 Punkte)

Wenn Sie $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ als vektorwertigen Differentialoperator betrachten, können Sie auch Skalarprodukte im $\mathbb{R}^3$, das Kreuzprodukt bilden.

Man definiert für $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto (f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))^T$ und $\vec{g}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \quad (\text{Divergenz}) \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (\text{Rotation}).$$

Berechnen Sie (wo möglich) $\operatorname{div} \vec{f}$, $\operatorname{rot} \vec{f}$, $\operatorname{grad} V$, $\operatorname{div} \operatorname{grad} V$ und $\operatorname{rot} \operatorname{grad} V$ für

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - z \sin z \\ x \cos(yz) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Aufgabe 28 ²

(keine Abgabe)

Wir möchten alle Lösungen der DGL³

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' - 2y' + y = 42$$

finden. Dazu betrachten wir zunächst die zugehörige homogene Gleichung und machen den Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

- a) Welche Gleichung muss λ erfüllen?
- b) Welche λ lösen diese Gleichung? HINWEIS: $\lambda = i$ ist darunter.
- c) Geben Sie dementsprechend 4 linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung an. HINWEIS: Eine doppelte Lösung der Bestimmungsgleichung für λ behandeln Sie wie bei DGLn zweiter Ordnung.
- d) Raten Sie eine Lösung der inhomogenen Gleichung.
- e) Geben Sie die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung an.

²Diese Aufgabe wird nicht in den Übungen besprochen sondern ist eine reine Wiederholungsaufgabe.

³Zur Erinnerung: $y^{(3)} = y'''$