

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe am 16.06.2016)

Aufgabe 33

(10 Punkte)

- Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x, y) = \frac{\cos y}{1-x^2}$ um $(0, 0)$.
- Bestimmen Sie die Taylorentwicklungen im Ursprung bis einschließlich des quadratischen Terms von $f(x, y, z) = \cosh(x) - \sin(yz) - xy(z-1)^7$ und $g(x, y) = \frac{e^{-y}}{1-x^2}$.
- Bestimmen Sie die Taylorreihe um den Punkt $(0, -1, 1)$ von

$$f(x, y, z) = z^3 - 3z^2 + x^2 + 4yx + 2y + 2z + 16.$$

HINWEIS: Sie müssen nicht ableiten.

Aufgabe 34

(10 Punkte + 5 Zusatzpunkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktionen

$$f(x, y) = 8x^2 + 2y^2 - (x^4 + y^4) \quad \text{und} \quad g(x, y) = (y^4 - y^2) \cos(x),$$

d.h. alle Punkte mit $\nabla f = 0$ (bzw. $\nabla g = 0$). Untersuchen Sie, ob dort Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 35

(10 Punkte)

Seien $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - (y+1)^2 \\ \cos(xy) \\ \log(1+x^2+y^2) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{x^2+y^2+z^2} \\ (xy-1)z \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie $f'(x, y)$ und $g'(x, y, z)$.
- Bestimmen Sie $(f \circ g)'(0, 0, 0)$ und $(g \circ f)'(0, 0)$.

ZUR ERINNERUNG: Es ist $(f \circ g)(\vec{x}) = f(g(\vec{x}))$, und entsprechend gilt laut Kettenregel
 $(f \circ g)'(\vec{x}) = f'(g(\vec{x})) \cdot g'(\vec{x})$.

Aufgabe 36

(5 Zusatzpunkte)

Ist $y + xy^2 - e^{xy} = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) mit $x_0 = 0$ und geeignetem y_0 nach $y = f(x)$ auflösbar? Berechnen Sie ggf. auch $f'(0)$.