

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (Abgabe am 07.07.2016)

Aufgabe 46

(10 Punkte)

Bestimmen Sie die Oberfläche des Sattels

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2, z = x^2 - y^2 \right\}$$

sowie den Fluss von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch S .

HINWEIS: Ebene Polarkoordinaten, $dx dy = r dr d\varphi$, sind hilfreich.

Aufgabe 47

(10 Punkte)

Berechnen Sie die Oberfläche des Torus T aus den Aufgaben 23 und 45.

Aufgabe 48

(10 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des Paraboloids

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 6 \right\}.$$

HINWEIS: Zylinderkoordinaten (bzw. ebene Polarkoordinaten) sind hilfreich.

Aufgabe 49

(10 Zusatzpunkte)

Sei $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $\vec{x} \mapsto \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, und sei K die Kugel mit Radius R .

- Bestimmen Sie $\int_{\partial K} \vec{f} d\vec{O}$ (ohne Verwendung eines Integralsatzes).
- Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{f}$.
- Bestimmen Sie $\int_K \operatorname{div} \vec{f} dV$ für $\alpha < 3$.
- Bilden Sie den Limes $\alpha \rightarrow 3$ für $\operatorname{div} \vec{f}$ und berechnen Sie damit $\int_K \operatorname{div} \vec{f} dV$. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Teil a für $\alpha = 3$. Erklären Sie den scheinbaren Widerspruch.