Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2016

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 12 (Abgabe 14.07.2016)

Aufgabe 50 (10 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils den Fluss (von innen nach außen) der Vektorfelder $\vec{v}_1(\vec{x}) = \vec{x}$ und $\vec{v}_2(\vec{x}) = (z^2, -x, y)^T$ durch die Oberfläche des Torus T aus den Aufgaben 23, 45 und 47.

Aufgabe 51 (10 Punkte)

Berechnen Sie $\displaystyle\oint_{\mathfrak{K}} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{x}$ für

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x + z \\ \tanh y \\ 5x - \cos y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 + 2\sin t \\ 1 \\ 2\cos t - 1 \end{pmatrix}, \ 0 \le t \le 2\pi\,.$$

Aufgabe 52 (Wiederholung: Summen, Reihen, Integrale) (20 Zusatzpunkte)

Sei (für $p, \lambda, \sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$)

$$b(k;n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,, \qquad P(k;\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,, \qquad f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b(k;n,p)\,, \qquad \sum_{k=0}^{n} k\, b(k;n,p)\,, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2\, b(k;n,p)\,,$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(k;\lambda)\,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(k;\lambda)\,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, P(k;\lambda)\,,$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\sigma^2}(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{\mu,\sigma^2}(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_{\mu,\sigma^2}(x)\,\mathrm{d}x\,,$

Hinweis: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,,$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu_1,\sigma_1^2}(y)\, f_{\mu_2,\sigma_2^2}(x-y)\,\mathrm{d}y\,,$ Ergebnis: $f_{\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2}(x)\,.$

Aufgabe 53 (10 Punkte)

a) Sei $\Omega = \{w, i, t, z\}$. Bestimmen Sie jeweils $\mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_j, \Omega)$ für $\mathcal{M}_1 = \{\{w\}\}$, $\mathcal{M}_2 = \{\{z\},\{w\}\}$ und $\mathcal{M}_3 = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ mit } |A| = 2\}$.

b) Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_1$ die Menge aller offenen Intervalle (a,b) aus $\mathbb{R}$ sowie $\mathcal{M}_2$ die Menge aller abgeschlossenen Intervalle $[a,b]$ aus $\mathbb{R}$.
Zeigen Sie: Die erzeugten σ-Algebren sind gleich[5], d.h. $\mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_1,\Omega) = \mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_2,\Omega)$.

---

[5] Es handelt sich nämlich in beiden Fällen um die Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 54 (10 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 17.07.16 auf `www.khanacademy.org` die Skills

- *Basic set notation*,
- *Simple probability*,
- *Permutations*,
- *Combinations* und
- *Permutations & combinations*.

HINWEISE: Siehe Aufgabe 5 (Blatt 1).