Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2016

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Klausur am 26.07.2016

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 98 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+8+8= 20 Punkte)

Sei $S_n := \displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Berechnen Sie S_1. (Mit vollständigem Rechenweg!)

b) Zeigen Sie: $S_n = \dfrac{2n-1}{2n}\,S_{n-1}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Hinweis: Partielle Integration.
Bestimmen Sie damit S_2 und S_3.

c) Berechnen Sie

$$\int_3^\infty \frac{20+16x}{(x-2)(x^2-4)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y'\sin x = 2y' - y\cos x$, $y(0) = 1$.

Aufgabe 3 (4+2+4 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ von $y'' + 2y' + 2y = 0$.
b) Lösen Sie das AWP $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.
c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 2y' + 2y = \sin(\sqrt{2}\,x)$.

Aufgabe 4 (7+3+4 = 14 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren von A.
b) Geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^T A\,U$.
c) Sei $\vec{x}_0 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, und $\vec{x}_n = A\vec{x}_{n-1}\ \forall\, n \geq 1$. Bestimmen Sie $\vec{x}_{16}$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Bringen Sie die quadratische Form in

$$5(x^2+y^2)+8xy=1$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn.

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x,y)=x^4-2x^2+y^2-2y\,,$$

d.h. alle (x,y) mit $(\nabla f)(x,y)=0$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich die Gleichung

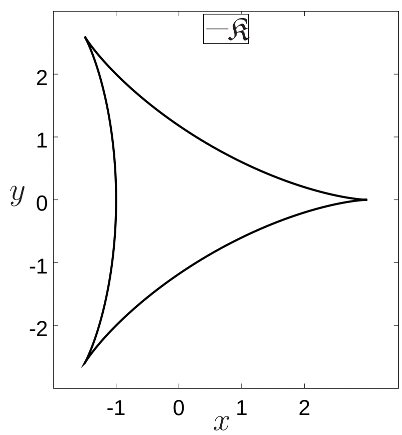
$$z^3+z=2-xy$$

in einer Umgebung von $(x_0,y_0,z_0)=(1,2,a)$ mit geeignetem a nach $z=f(x,y)$ auflösen lässt, und berechnen Sie $(\nabla f)(1,2)$.

Aufgabe 8 (8+4 = 12 Punkte)

Sei $\vec{f}(x,y)=\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$ und

$$\mathfrak{K}\,:\,\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos t+\cos(2t)\\2\sin t-\sin(2t)\end{pmatrix}\,,\ 0\le t<2\pi\,.$$



a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}}\vec{f}\mathrm{d}\vec{x}$.
   HINWEIS: $\cos x\cos y-\sin x\sin y=\cos(x+y)$
b) Bestimmen Sie den Inhalt der von $\mathfrak{K}$ eingeschlossenen Fläche.
   HINWEIS: Denken Sie an den Satz von Stokes.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Sei $a>0$ und

$$B:=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\eta\,\cos\phi\\\sinh\eta\,\sin\phi\end{pmatrix}\,,\ \begin{matrix}0\le\eta\le a\\0\le\phi<2\pi\end{matrix}\right\}$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt von B, d.h. das Integral $\iint_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

ZUR ERINNERUNG: Es gilt $\cosh' x=\sinh x$, $\sinh' x=\cosh x$, $\cosh^2 x=1+\sinh^2 x$, $\sinh x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$, und Sie dürfen $\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\pi$ verwenden.