Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2016

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 13.10.2016

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 98 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+6+9 = 19 Punkte)

Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^\infty x^5\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ HINWEIS: Partielle Integration

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{4x^2+7x+2}{x^4+3x^3+2x^2}\,\mathrm{d}x$ HINWEIS: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y' = (y^2+1)\,\mathrm{e}^x \sin y$, $y(0) = \pi$.

Aufgabe 3 (4+2+4 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ von $y'' + 8y' + 15y = 0$.

b) Lösen Sie das AWP $y'' + 8y' + 15y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 8y' + 15y = 6\mathrm{e}^{-3x}$

Aufgabe 4 (7+3+4 = 14 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren von A.

b) Geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^T A\,U$.

c) Sei $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie $(A^4 - A^3 + 3A)\vec{x}$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Sei
$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & e^{-2x} & 0 \\ -\sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie A.

Aufgabe 6 (11 Punkte)

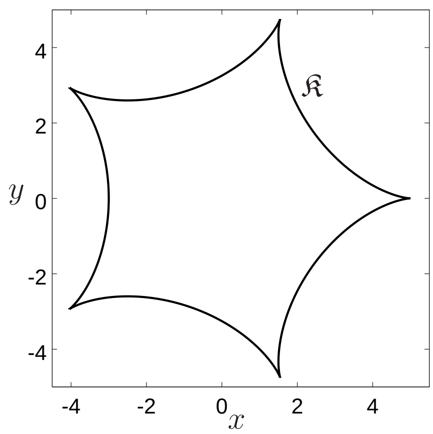
Bringen Sie die quadratische Form in
$$4(x^2+y^2)+10xy=1$$
auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Sei $f(x,y) = \sin x - y^2 + 2y$. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f, d.h. alle (x,y) mit $(\nabla f)(x,y) = 0$. Untersuchen Sie, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 8 ($8+4 = 12$ Punkte)

Sei $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ und
$$\mathfrak{K}\,:\,\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos t + \cos(4t) \\ 4\sin t - \sin(4t) \end{pmatrix},\ 0 \le t < 2\pi\,.$$



a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\mathrm{d}\vec{x}$.
HINWEIS: $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y)$

b) Bestimmen Sie den Inhalt der von $\mathfrak{K}$ eingeschlossenen Fläche.
HINWEIS: Denken Sie an den Satz von Stokes.

Aufgabe 9 ($8+2 = 10$ Punkte)

Sei
$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{matrix} x^2+y^2 \le 4 \\ z^2 \le 1 + x^2 + y^2 \end{matrix} \right\} \qquad \text{und} \qquad \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 5x - z^5 \\ x^3 - 3y \\ 2y + z \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Volumen von $\mathcal{K}$, d.h. $\int_{\mathcal{K}} \mathrm{d}V$.
HINWEIS: Polarkoordinaten (in der xy-Ebene) sind hilfreich.

b) Bestimmen Sie den Betrag des Flusses von $\vec{v}$ durch $\partial\mathcal{K}$, d.h. $\left| \int_{\partial\mathcal{K}} \vec{v} \cdot \overbrace{\vec{n}\,\mathrm{d}O}^{\mathrm{d}\vec{O}} \right|$.