

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 3 (Abgabe am 11.05.2017)

Aufgabe 11

(10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen. Geben Sie in Teil c auch die Menge aller reellen Lösungen an.

a) $y'' + 7y' + 10y = 0$

b) $y'' + 6y' + 9y = 0$

c) $y'' + 2y' + 5y = 0$

Aufgabe 12

(10 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

b) $y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 5, y'(0) = 0$

c) $y'' + 7y' + 10y = 0, \quad y(0) = 1 = y'(0)$

d) $y'' + 7y' + 10y = 1, \quad y(0) = 1 = y'(0)$

Aufgabe 13

(keine Abgabe)

Wir möchten alle Lösungen der DGL²

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + 2y'' + 2y' + y = 17$$

finden. Dazu betrachten wir zunächst die zugehörige homogene Gleichung und machen den Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

- a) Welche Gleichung muss λ erfüllen?
- b) Welche λ lösen diese Gleichung? HINWEIS: $\lambda = i$ ist darunter.
- c) Geben Sie dementsprechend 4 linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung an.
HINWEIS: Eine doppelte Lösung der Bestimmungsgleichung für λ behandeln Sie wie bei DGLn zweiter Ordnung.
- d) Raten Sie eine Lösung der inhomogenen Gleichung.
- e) Geben Sie die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung an.

²Zur Erinnerung: $y^{(2)} = y''$

Aufgabe 14

(10 Punkte)

Wir möchten das AWP

$$y' = \frac{3y}{x} - y^2 - \frac{3}{x^2}, \quad y(2) = \frac{7}{6}$$

lösen.

- a) Rechnen Sie nach, dass $y(x) = \frac{1}{x}$ die DGL löst (aber nicht das AWP).
- b) Nun definieren wir u durch

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{u(x)}.$$

Welche DGL muss u erfüllen, damit y die Ausgangs-DGL löst?

- c) Lösen Sie die DGL für u , und bestimmen Sie damit die Lösung des ursprünglichen AWP.

Aufgabe 15³ (vgl. <http://spikedmath.com/517.html>)

(10 Zusatzpunkte)

Wir definieren eine Hyperbel als die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die der Betrag der Differenz der Abstände zu zwei gegebenen Punkten, genannt Brennpunkte, gleich ist. Als Brennpunkte wählen wir $(\pm f, 0)$ und als Betrag der Differenzen der Abstände $2a$ mit $0 < a < f$.

- a) Drücken Sie die in der Definition genannte Bedingung, die die Punkte (x, y) erfüllen müssen, als eine Gleichung aus (die dann die Parameter f und a enthält).
- b) Bringen Sie die Gleichung aus (a) auf die Form

$$\frac{x^2}{\dots} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Drücken Sie $b > 0$ als Funktion von f und a aus.

- c) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Hyperbel mit der x -Achse.
- d) Bestimmen Sie $m := \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|y|}{|x|}$ für Punkte (x, y) auf der Hyperbel.

Welche Rolle spielen die Geraden $y = \pm mx$ beim Zeichnen der Hyperbel?

- e) Zeichnen Sie die Hyperbel für $f = 5$ und $a = 3$.

Aufgabe 16

(12 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 28.05.17 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Features of a circle from its standard equation,*
- *Graph a circle from its standard equation,*
- *Features of a circle from its expanded equation,*
- *Graph a circle from its expanded equation,*
- *Center & radii of ellipses from equation* und
- *Ellipse standard equation & graph*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 5 (Blatt 1).

³Diese Aufgabe bezieht sich nicht auf den aktuellen Vorlesungsstoff, sondern kann mit elementaren Methoden vollkommen unabhängig von der Vorlesung bearbeitet werden. Wir werden aber im Laufe des Semesters auf diese Aufgabe zurückkommen.