

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 4 (Abgabe 18.05.2017)

Aufgabe 17

(20 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden DGLn.

- a) $y'' + 7y' + 10y = e^{-x}$
- b) $y'' + 7y' + 10y = e^{-2x}$
- c) $y'' + 2y' + 5y = \sin x$
- d) $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$

Aufgabe 18

(10 Punkte)

Wie betrachten das AWP $y'(x) = 1 - y(x)$, $y(0) = 2$.

- a) Lösen Sie das AWP (wie in früheren Aufgaben).
- b) Berechnen Sie alle Picard-Iterierten $y_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, für das AWP.
- c) Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ und vergleichen Sie mit Teil (a).

HINWEIS: Berechnen Sie in Teil (b) zunächst, $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ und $y_3(x)$. Raten Sie davon ausgehend, wie $y_n(x)$ aussehen könnte. Beweisen Sie dann Ihre Vermutung.

Aufgabe 19

(keine Abgabe)

Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto \vec{x}' = D_\phi \vec{x} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$D_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

bewirkt eine Drehung des Vektors $\vec{x}$ um den Winkel ϕ .

- a) Illustrieren Sie dies für $\phi = \frac{\pi}{3}$ und die Vektoren $(0, 2)^T$ und $(3, 1)^T$ mit einer Zeichnung.
- b) Zeigen Sie: $D_\phi^{-1} = D_\phi^T = D_{-\phi}$ (d.h. $\vec{x} = D_{-\phi} \vec{x}'$).

Aufgabe 20

(10 Zusatzpunkte)

Wir möchten die folgende Menge zeichnen,

$$E = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{5}{8}(x^2 + y^2) + \frac{3}{4}xy = 1 \right\}.$$

- a) Drücken Sie dazu zunächst die Bestimmungsgleichung in den gedrehten Koordinaten $(x', y')^T = D_\phi \vec{x}$ aus (D_ϕ wie in Aufgabe 19), und wählen Sie ϕ so, dass kein Term proportional zu $x'y'$ auftritt.
- b) Zeichnen Sie E in einem xy -Koordinatensystem. Tragen Sie dazu zunächst das gedrehte $x'y'$ -Koordinatensystem ein.

HINWEIS: Die Gleichung $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ beschreibt eine Ellipse, vgl. Aufgabe 9.

BEMERKUNG: Wir werden bald lernen, wie man dieselbe Aufgabe mithilfe von Eigenwerten und Eigenvektoren löst. Hier wird das jedoch nicht benötigt und soll auch nicht verwendet werden!

Aufgabe 21

(2 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 28.05.17 auf www.khanacademy.org die *Skill*

- *Vertices & direction of a hyperbola.*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 5 (Blatt 1).