

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe ausnahmsweise bis spätestens **Mi, 24.05.2017, 12:00**
in die Mappen vor C6P43)

Aufgabe 22

(20 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen alle Eigenwerte und alle zugehörigen Eigenvektoren,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie außerdem jeweils an, ob die Matrix diagonalisierbar ist.

Aufgabe 23

(10 Punkte)

- a) Führen Sie die HAT für die Matrix A aus Aufgabe 22 durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix U mit zugehöriger Diagonalmatrix $D = \overline{U}^T A U$ an.
- b) Berechnen Sie e^{Cx} für $x \in \mathbb{R}$ und C aus Aufgabe 22.
HINWEIS: Bringen Sie die Matrix C mithilfe einer HAT in Diagonalform.

Aufgabe 24

(10 Zusatzpunkte)

Man nennt

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dabei sind die Elemente von $\vec{y}$ Funktionen von x , und $\vec{y}'$ ist die komponentenweise Ableitung nach x , d.h.

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} y'_1(x) \\ \vdots \\ y'_n(x) \end{pmatrix}.$$

- a) Rechnen Sie nach: Ist λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{u}$, so ist

$$\vec{y}(x) = e^{\lambda x} \vec{u}$$

eine Lösung des DGL-Systems.

- b) Zeigen Sie: Jedes $\vec{y}$ der Form

$$\vec{y}(x) = e^{Ax} \vec{b}, \quad \vec{b} \in \mathbb{C}^n \text{ beliebig,}$$

ist eine Lösung des DGL-Systems. Welchen Wert nimmt $\vec{y}(0)$ an?

- c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, mit A aus Aufgabe 22.

Aufgabe 25

(keine Abgabe)

- a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \phi \in \mathbb{R}.$$

- b) Zeigen Sie: Ist $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär, und ist λ ein Eigenwert von U , so folgt $|\lambda| = 1$.

Aufgabe 26

(keine Abgabe)

Sei $\vec{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten x, y, z . Wir möchten uns die folgende Menge veranschaulichen,

$$T := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

- a) Zeichnen Sie zunächst die Schnittmengen mit den drei Koordinatenebenen, z.B. ist $T_{xy} := \{\vec{x} \in T \mid z = 0\}$ die Schnittmenge mit der xy -Ebene.
b) Zeichnen Sie nun $T \subset \mathbb{R}^3$.
c) Erklären Sie kurz, wie Sie von den Ergebnissen in (a) zu der Zeichnung in (b) gelangt sind.

HINWEIS: Wenn Sie in (a) die Gleichung, die ein Punkt erfüllen muss, damit er sowohl in T als auch in einer Koordinatenebene liegt, etwas umstellen, kommen stets Kreise zum Vorschein.