

## Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe 01.06.2017)

---

### Aufgabe 27

(10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix  $U$  mit zugehöriger Diagonalmatrix  $D = \overline{U}^T A U$  an.

### Aufgabe 28

(20 Punkte)

Bringen Sie die quadratischen Formen in den folgenden Gleichungen auf Hauptachsen, geben Sie an, was für Kegelschnitte die Gleichungen beschreiben, und zeichnen Sie sie.

a)  $\frac{3}{2}x^2 + 3xy + \frac{11}{2}y^2 = 1$

b)  $11x^2 - 6xy + 3y^2 = 2$

c)  $5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 8$

d)  $9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 = 25$

### Aufgabe 29

(keine Abgabe)

a) Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hermitesch mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Zeigen Sie:  $\det A = \prod_{j=1}^n \lambda_j$ .

b) Gegeben sei die quadratische Form ( $\vec{x} = (x, y, z)^T$ )

$$q_A(\vec{x}) = x^2 + 10y^2 + z^2 - 4y(x+z) + 2axz, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Für welche Werte von  $a$  ist  $q_A$  positiv definit? Welche Definitheitseigenschaften hat  $q_A$  für andere Werte von  $a$ ?

**Aufgabe 30**

(10 Zusatzpunkte)

Wir schreiben die DGL 2. Ordnung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (*)$$

als ein DGL-System 1. Ordnung. Definieren Sie dazu

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix},$$

und suchen Sie eine Matrix  $A$ , so daß  $\vec{y}' = A\vec{y}$  äquivalent zu (\*) wird. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von  $A$  und vergleichen Sie mit dem charakteristischen Polynom der DGL (\*).

BEMERKUNG: Das Umschreiben auf ein System funktioniert analog für DGLn beliebiger Ordnung (auch nichtlineare), sehen Sie wie?

**Aufgabe 31**

(2 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 11.06.17 auf [www.khanacademy.org](http://www.khanacademy.org) die *Skill*

- *Linear systems of equations capstone.*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 5 (Blatt 1).