

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe 22.06.2017)

Aufgabe 36

(10 Punkte)

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f} d\vec{x}$ für $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ und die Wege

a) $\mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi],$

b) $\mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, \pi]$ und

c) \mathfrak{K}_3 : Die geradlinige Verbindung von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Geben Sie auch jeweils Anfangs- und Endpunkt des Integrationswegs an. Ist \vec{f} konservativ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 37

(10 Punkte)

Berechnen Sie $\int_{\mathfrak{K}_j} \vec{f} d\vec{x}$, $j = 1, 2$, für

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} ze^{xz} - 2x \cos(x^2 + y^2) \\ e^{-y^2} - 2y \cos(x^2 + y^2) \\ xe^{xz} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\text{sowie} \quad \mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \log(1 + 3t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Zeichnen Sie außerdem \mathfrak{K}_1 .

Aufgabe 38

(10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = e^{xyz} + (x - z)x^2y^2$, $\vec{x} = (x, y, z)^T$. Berechnen Sie alle zweiten partiellen Ableitungen von f . Geben Sie die Hesse-Matrix $f'' = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right)$ an den Stellen $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ und $(1, 1, 1)$ an.

Aufgabe 39

(keine Abgabe)

Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}.$$

- Bestimmen Sie $g_x(0, 0)$ und $g_y(0, 0)$.
- Berechnen Sie g_x und g_y für $(x, y) \neq (0, 0)$.
- Bestimmen Sie $g_{xy}(0, 0)$ und $g_{yx}(0, 0)$.