Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2017

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 9 (Abgabe am 29.06.2017)

Aufgabe 40 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = \frac{\sin x}{1-y^2}$ um $(0,0)$.

b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklungen im Ursprung bis einschließlich des quadratischen Terms von $f(x,y,z) = \cosh(y) - \sin(xz) - xy(z-1)^{17}$ und $g(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^y + x}{1-x^2}$.

c) Bestimmen Sie die Taylorreihe um den Punkt $(0,-1,1)$ von

$$f(x,y,z) = z^3 - 3z^2 + x^2 + 4yx + 2y + z - 17\,.$$

Hinweis: Sie müssen nicht ableiten.

Aufgabe 41 (10 Punkte)

Wenn Sie $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ als vektorwertigen Differentialoperator betrachten, können Sie auch Skalarprodukte und, im $\mathbb{R}^3$, das Kreuzprodukt bilden.
Man definiert für $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto (f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))^T$ und $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{div}\vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \quad \text{(Divergenz)} \quad \text{und} \quad \operatorname{rot}\vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{(Rotation)}.$$

Berechnen Sie (wo möglich) $\operatorname{div}\vec{f}$, $\operatorname{rot}\vec{f}$, $\operatorname{grad} V$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} V$ und $\operatorname{rot}\operatorname{grad} V$ für

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ x - z\cos z \\ x\sin(yz) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$

Aufgabe 42 (15 Zusatzpunkte)
Bei einer chemischen Reaktion sind laut Massenwirkungsgesetz die Reaktionsraten, also die zeitlichen Änderungen der Konzentrationen der beteiligten Stoffe, proportional zum Produkt der Konzentrationen der Reaktanten (Ausgangsstoffe). Die Proportionalitätskonstanten (genannt Ratenkonstanten) legen die Reaktionsgeschwindigkeiten fest.

Wir betrachten die Umwandlung eines Substrats S in ein Produkt P unter Einfluss eines Enzyms E. Als Zwischenzustand bilde sich ein Komplex SE. Die chemischen Reaktionsgleichungen lauten

$$S + E \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} SE \qquad \text{und} \qquad SE \overset{k_3}{\rightarrow} P + E\,.$$

Die (positiven) Ratenkonstanten k_1, k_2, k_3 sind über bzw. unter den Pfeilen notiert. Die Rückreaktion zur zweiten Gleichung finde nicht statt.

Wir bezeichnen die Konzentrationen von S, E, SE und P mit s, e, c und p – alles Funktionen der Zeit t. Das Massenwirkungsgesetz liefert uns nun Differentialgleichungen für die Funktionen s, e, c und p, z.B. gilt

$$\dot{c}(t) = k_1 e(t) s(t) - k_2 c(t) - k_3 c(t)\,,$$

denn wenn wir an der Reaktionsrate $\dot{c}$ des Komplexes SE interessiert sind, müssen wir alle drei Reaktionen betrachten, an denen SE beteiligt ist: SE wird in Reaktion 1 gebildet, aus E und S, daher rührt der Term $k_1 e(t) s(t)$; SE zerfällt in Reaktion 2 und in Reaktion 3, daher die Terme $-k_2 c(t)$ und $-k_3 c(t)$.

a) Stellen Sie analog die Gleichungen für die drei anderen Reaktionsraten auf.

Wir haben nun ein (nichtlineares) Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit vier Gleichungen. Zur Zeit $t = 0$ seien positive Konzentrationen s_0 und e_0 von Substrat und Enzym vorhanden aber kein Komplex und kein Produkt – damit haben wir ein Anfangswertproblem definiert.

b) Lösen Sie die Gleichung für p. (Ihre Lösung wird die momentan noch unbekannte Funktion c enthalten; ein Integral darf auch vorkommen.)
c) Betrachten Sie $\dot{e} + \dot{c}$ und folgern Sie daraus eine einfache Beziehung zwischen e und c. Erklären sie auch anschaulich, warum diese Beziehung gilt.
Eliminieren Sie, mittels dieser Beziehung, e aus den Gleichung für $\dot{s}$ und $\dot{c}$.

Nun bleibt uns ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit zwei Gleichungen für die Funktionen s und c, dessen Lösung wir qualitativ verstehen wollen.

d) Begründen Sie: Bei $t = 0$ fällt s, während c steigt. Dies gilt auch weiter, solange c hinreichend klein ist.
e) Die Konzentration c steigt, bis eine bestimmte Bedingung erfüllt ist – welche? Begründen Sie, dass zu diesem Zeitpunkt s immer noch fällt.
f) Skizzieren Sie damit (soweit möglich) den zeitlichen Verlauf von s und c in einem gemeinsamen Diagramm.
g) Ergänzen Sie die Skizze um den zeitlichen Verlauf von e und p.