Universität Tübingen, Mathematisches Institut Sommersemester 2017
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 10 (Abgabe 06.07.2017)

Aufgabe 43 (10 Punkte + 5 Zusatzpunkte)
Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktionen

$$f(x,y) = 2x^2 + 8y^2 - (x^4 + y^4) \qquad \text{und} \qquad g(x,y) = (x^4 - x^2)\cos(y)\,,$$

d.h. alle Punkte mit $\nabla f = 0$ (bzw. $\nabla g = 0$). Untersuchen Sie, ob dort Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 44 (10 Punkte)
Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - (y+1)^2 \\ \cos(xy) \\ \log(1 + x^2 + y^2) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2} \\ (xy-1)z \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie $f'(x,y)$ und $g'(x,y,z)$.
b) Bestimmen Sie $(f \circ g)'(0,0,0)$ und $(g \circ f)'(0,0)$.

Zur Erinnerung: Es ist $(f \circ g)(\vec{x}) = f(g(\vec{x}))$, und entsprechend gilt laut Kettenregel $(f \circ g)'(\vec{x}) = f'(g(\vec{x})) \cdot g'(\vec{x})$.

Aufgabe 45 (5 Zusatzpunkte)
Ist $y + xy^2 - \mathrm{e}^{xy} = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) mit $x_0 = 0$ und geeignetem y_0 nach $y = f(x)$ auflösbar? Berechnen Sei ggf. auch $f'(0)$.

Aufgabe 46 (10 Punkte)
Zeigen Sie, dass sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 + \cos(y_1 y_2) &= y_2 x_1 + 1 \\ \sin y_1 &= x_2 + y_2 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, -1, 0, 1)$ nach $\vec{y} = f(\vec{x})$, d.h.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} ,$$

auflösen lässt, und berechnen Sie $f'(0, -1)$.

Aufgabe 47 (Fortsetzung von Aufgabe 42) (10 Zusatzpunkte)

Die Lösung von Aufgabe 42c war ein DGL-System der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{s}(t) \\ \dot{c}(t) \end{pmatrix} = f\big(s(t), c(t)\big)$$

mit einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

a) Wählen Sie positive Parameter k_1, k_2, k_3 und e_0. Visualisieren Sie die Funktion f, indem Sie in der sc-Ebene an Punkten mit den Koordinaten (s, c) Pfeilchen $f(s, c)$ einzeichnen. Wählen Sie den Bereich in der sc-Ebene sinnvoll. Wählen Sie die absolute Länge der Pfeile beliebig aber sinnvoll, die relative Länge der Pfeile muss stimmen.
   Hinweis: Sie dürfen zum Zeichnen auch einen Computer verwenden. Tippen Sie z.B. auf `www.wolframalpha.com` den Ausdruck `vector field plot` ein: Sie sehen dann genau so eine Visualisierung einer (anderen) Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, und es wird Ihnen ein Formular angezeigt, in dem Sie die Funktion und den Plot-Bereich eingeben können.

Lösungen des DGL-Systems entsprechen Kurven in der sc-Ebene, deren Tangentialvektoren ("Geschwindigkeitsvektoren") an jeder Stelle durch die Pfeilchen des Plots aus Teil a gegeben sind. (Warum?)

b) Zeichnen Sie zwei oder drei Lösungen des DGL-Systems für Anfangsbedingungen der Form $\big(s(0), c(0)\big) = (s_0, 0)$, mit $s_0 > 0$, in Ihr(e) Diagramm(e) aus Teil a ein. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus Aufgabe 42f.

Es gilt $f(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, d.h. $\big(s(t), c(t)\big) = (0,0)\ \forall t$ ist eine Lösung des DGL-Systems.[4] Für kleine s und c approximieren wir das DGL-System durch das lineare DGL-System (warum?)

$$\begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{c} \end{pmatrix} = f'(0,0) \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} .$$

c) Bestimmen Sie $f'(s, c)$.
d) Untersuchen Sie $f'(0, 0)$ auf Definitheit.
e) Wie sehen verschiedene Lösungen des linearen DGL-Systems (qualitativ) aus?
   Hinweis: Denken Sie dabei v.a. an Aufgabe 24a.
f) Wo und wie manifestiert sich das Verhalten aus Teil e in dem/den Plot(s) aus Teil a?

[4] Man nennt daher $(0, 0)$ einen Fixpunkt des DGL-Systems.