

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 12 (Abgabe 20.07.2017)

Aufgabe 54

(10 Punkte)

- a) Bestimmen Sie das Volumen des Ellipsoids

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+.$$

- b) Berechnen Sie das Volumen einer Kugelschale mit Innenradius R und Dicke d , d.h. berechnen Sie $|K| = \int_K dV$ für

$$K := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid R \leq |\vec{x}| \leq R + d \}.$$

Bestimmen Sie auch $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{|K|}{d}$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 55 (Zylinderkoordinaten)

(20 Punkte)

- a) Berechnen Sie das Volumenelement dV in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) , definiert durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad (x, y, z : \text{kartesisch}).$$

- b) Bestimmen Sie das Volumen, das vom Graph der Funktion

$$f(x, y) = 9 - (x^2 + y^2)$$

und der xy -Ebene eingeschlossen wird.

- c) Bestimmen Sie das Volumen von $K = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq (1 - \frac{z}{3})^2, 0 \leq z \leq 3 \}$, und zeichnen Sie K .
d) Berechnen Sie die Oberfläche von K aus Teil c.

Aufgabe 56

(15 Zusatzpunkte)

Berechnen Sie das Volumen des Torus⁷

$$T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + r \sin u) \cos v \\ (1 + r \sin u) \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix}, 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, 0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v < 2\pi \right\},$$

d.h. berechnen Sie $\int_T dV$, und seine Oberfläche, d.h. $\int_{\partial T} dO$, wobei

$$\partial T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + \frac{1}{2} \sin u) \cos v \\ (1 + \frac{1}{2} \sin u) \sin v \\ \frac{1}{2} \cos u \end{pmatrix}, 0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v < 2\pi \right\}.$$

⁷vgl. Aufgaben 26 & 49