Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 13 (keine Abgabe)

Aufgabe 57

Bestimmen Sie die Oberfläche des Sattels

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2, z = x^2 - y^2 \right\}$$

sowie den Fluss von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch S .

HINWEIS: Ebene Polarkoordinaten, $dx dy = r dr d\varphi$, sind hilfreich.

Aufgabe 58

Sei $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch $\vec{x} \mapsto \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, und sei K die Kugel mit Radius R .

- Bestimmen Sie $\int_{\partial K} \vec{f} d\vec{O}$ (ohne Verwendung eines Integralsatzes).
- Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{f}$.
- Bestimmen Sie $\int_K \operatorname{div} \vec{f} dV$ für $\alpha < 3$.
- Bilden Sie den Limes $\alpha \rightarrow 3$ für $\operatorname{div} \vec{f}$ und berechnen Sie damit $\int_K \operatorname{div} \vec{f} dV$. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Teil a für $\alpha = 3$. Erklären Sie den scheinbaren Widerspruch.

Aufgabe 59

Bestimmen Sie jeweils den Fluss (von innen nach außen) der Vektorfelder $\vec{v}_1(\vec{x}) = \vec{x}$ und $\vec{v}_2(\vec{x}) = (z^2, -x, y)^T$ durch die Oberfläche des Torus T aus den Aufgaben 26, 49 und 56.

Aufgabe 60

Berechnen Sie $\oint_{\mathfrak{K}} \vec{v} d\vec{x}$ für

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^x + z \\ \tanh y \\ 5x - \cos y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 + 2 \sin t \\ 1 \\ 2 \cos t - 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Aufgabe 61 (Wiederholung: Summen, Reihen, Integrale)

Sei (für $p, \lambda, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$)

$$b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad f_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Berechnen Sie:

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n b(k; n, p), \quad \sum_{k=0}^n k b(k; n, p), \quad \sum_{k=0}^n k^2 b(k; n, p),$$

$$\text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} P(k; \lambda), \quad \sum_{k=0}^{\infty} k P(k; \lambda), \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(k; \lambda),$$

$$\text{c) } \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu, \sigma^2}(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\mu, \sigma^2}(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\mu, \sigma^2}(x) dx,$$

$$\text{HINWEIS: } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

$$\text{d) } \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu_1, \sigma_1^2}(y) f_{\mu_2, \sigma_2^2}(x-y) dy, \quad \text{ERGEBNIS: } f_{\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2}(x).$$