Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2017

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Klausur am 01.08.2017

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 104 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+4+8 = 16 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^7} \frac{\mathrm{d}x}{x \log x}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2+14x+18}{(x+1)(x^2+3x+2)}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $xy' = y \log y,\ y(1) = \mathrm{e}$.

Aufgabe 3 (4+4+2 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ von $y'' + 4y' + 5y = 0$.

b) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 4y' + 5y = \sin(\sqrt{5}\,x)$.

c) Lösen Sie das AWP $y'' + 4y' + 5y = \sin(\sqrt{5}\,x),\ y(0) = y'(0) = 0$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Geben Sie ein Anfangswertproblem an, dessen eindeutige Lösung $y(x) = 1 + \sin x$ lautet.

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Bringen Sie die quadratische Form in

$$\frac{3}{5}(x^2 - y^2) + \frac{8}{5}xy = 1$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn.

Aufgabe 6 (4+2+4 = 10 Punkte)

Sei $A = \big(a_{jk}\big) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$, mit $a_{jk} = 1\ \forall\, j,k = 1,\dots,n$.

a) Berechnen Sie $A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$.

b) Geben Sie $\det A$ an (mit Begründung).

c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Aufgabe 7 (12 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x,y) = (x+y)^2 + \cos x\,,$$

d.h. alle (x,y) mit $(\nabla f)(x,y) = 0$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Zur Erinnerung: $\cos(n\pi) = (-1)^n\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Für welche $(\eta,\phi) \in [0,\infty) \times [0,2\pi)$ ist die Funktion

$$\vec{f}(\eta,\phi) = \begin{pmatrix}\cosh\eta\,\cos\phi\\ \sinh\eta\,\sin\phi\end{pmatrix}$$

lokal umkehrbar?

Zur Erinnerung: $\cosh' x = \sinh x,\ \sinh' x = \cosh x,\ \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x,$
$\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Bestimmen Sie Minimum und Maximum der Funktion $f(x,y) = x + y$ unter der Nebenbedingung $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1$. Wo werden Minimum und Maximum angenommen?

Aufgabe 10 (8 Punkte)

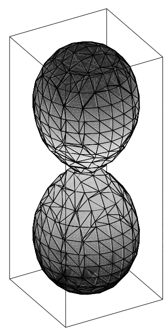
Sei $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix}y+x\\ y-x\end{pmatrix}$ und $\mathfrak{K}:\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin t\\ 2\cos t\end{pmatrix}$, $0 \leq t < 2\pi$.

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\mathrm{d}\vec{x}$.

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Bestimmen Sie das Volumen von

$$K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix}r\sin\theta\cos\phi\\ r\sin\theta\sin\phi\\ r\cos\theta\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}0 \leq r \leq \cos^2\theta\\ 0 \leq \theta \leq \pi\\ 0 \leq \phi < 2\pi\end{matrix} \right\},$$



d.h. berechnen Sie $|K| = \int_K \mathrm{d}V$.