Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2017

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 12.10.2017

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 105 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+4+8 = 16 Punkte)
Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\int_0^\infty x^2\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^5} \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^2}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2+4x+3}{(x+2)(x^2+3x+2)}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $xy' = y(\log y)^2,\ y(1) = \mathrm{e}$.

Aufgabe 3 (4+2+2 = 8 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ von $y'' + 6y' + 9y = 0$.
b) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 6y' + 9y = 17$.
c) Lösen Sie das AWP $y'' + 6y' + 9y = 17$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Aufgabe 4 (7+2+4 = 13 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren von A.
b) Geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^T A\, U$.
c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}\,'(x) = A\,\vec{y}(x)$, $\vec{y}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Bringen Sie die quadratische Form in

$$\frac{3}{5}(x^2 - y^2) - \frac{8}{5}xy = 1$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn.

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x,y) = (x-y)^2 + \cos y\,,$$

d.h. alle (x,y) mit $(\nabla f)(x,y) = 0$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.
Zur Erinnerung: $\cos(n\pi) = (-1)^n \;\forall n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 7 (8 Punkte)
Zeigen Sie, dass sich die Gleichung

$$z^3 + 3z = xy + 3$$

in einer Umgebung von $(x_0, y_0, z_0) = (3, -1, a)$ mit geeignetem a nach $z = f(x,y)$ auflösen lässt, und berechnen Sie $(\nabla f)(3,-1)$.

Aufgabe 8 (10 Punkte)
Sei

$$B = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,\cos\phi \\ r\,\sin\phi \end{pmatrix}\,,\; \begin{matrix} -\frac{\pi}{2} \le \phi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le \cos\phi \end{matrix} \right\}$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt von B, d.h. das Integral $\iint_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
Zur Erinnerung: $\cos^2\phi = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2\phi)\big)$.

Aufgabe 9 (8 Punkte)
Sei $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}\,,\; 0 \le t < 2\pi\,.$
Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\mathrm{d}\vec{x}$.

Aufgabe 10 (3+7+2+4 = 16 Punkte)
Sei $y_0(x) = 2$ und

$$y_{n+1}(x) = 2 + \int_0^x \big(1 - y_n(t)\big)\mathrm{d}t \qquad \forall n \ge 0\,.$$

a) Berechnen Sie $y_1(x)$ und $y_2(x)$.
b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$y_n(x) = 2 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-1)^\nu x^\nu}{\nu!} \qquad \forall n \ge 1\,.$$

c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$. (Das Ergebnis darf kein Summenzeichen mehr enthalten.)
d) Welches Anfangswertproblem wurde in Teil (a)–(c) durch Picard-Iteration gelöst?