Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe am 13.11.15)

Aufgabe 25

(10 Punkte)

Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie ggf. die Ableitung.

a) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ b) $f(x) = |x^2 - 9|$ c) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ d) $f(x) = x|x|$

Aufgabe 26

(keine Abgabe)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 9}{27 - x^3}$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^7 + 128}{x^2 - 4}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{1 - x}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Aufgabe 27

(10 Punkte)

Sei $P(x)$ ein Polynom vom Grad $\leq n$, d.h.

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R}.$$

- a) Berechnen Sie $P^{(\nu)}(x)$, d.h. die ν te Ableitung von P .
HINWEIS: In Abschnitt 4.5 haben wir die k te Ableitung von x^n berechnet.
- b) Sei weiter $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie:

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{P^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu.$$

HINWEIS: Setzen Sie Ihr Ergebnis aus (a) ein und formen Sie um wie in Aufgabe 23.

Aufgabe 28

(10 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 13.12.15 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Derivative intuition*,
- *Graphs of functions and their derivatives*,
- *Visualizing derivatives*,
- *Power rule (basic)* und
- *Power rule (advanced)*.

HINWEISE: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).

Aufgabe 29

(keine Abgabe)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten im Folgenden stets die Asymptotik für $x \rightarrow x_0$. Sei weiter $f(x) = o((x - x_0)^n)$ und $g(x) = o((x - x_0)^m)$ mit $n, m \in \mathbb{N}_0$.

a) Zeigen Sie:¹

$$f(x)g(x) = o((x - x_0)^{n+m}).$$

Dafür schreiben wir kurz $o((x - x_0)^n) o((x - x_0)^m) = o((x - x_0)^{n+m})$.

b) Zeigen Sie²

$$f(x) + g(x) = o((x - x_0)^{\min(n,m)}).$$

Dafür schreiben wir kurz $o((x - x_0)^n) + o((x - x_0)^m) = o((x - x_0)^{\min(n,m)})$.

Aufgabe 30

(5 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die Produktregel,

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

unter Verwendung der Charakterisierung der Ableitung mit Hilfe von Klein-o (Lemma 4).

¹Denken Sie daran, wie wir in der Vorlesung gezeigt haben, dass $x^m o(x^n) = o(x^{n+m})$, $x \rightarrow 0$, was die Kurzschreibweise der folgenden Äquivalenz ist,

$$f(x) = o(x^n) \Leftrightarrow x^m f(x) = o(x^{n+m}), \quad x \rightarrow 0.$$

²Dabei ist $\min(x_1, x_2, \dots, x_N)$ die kleinste der Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_N$, d.h. z.B. ist $\min(2, 0, 1, 3) = 0$.