

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe am 20.11.2015)

Aufgabe 31

(keine Abgabe)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^{2n+5} \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{1-2n}\right)^{n/3}$$

Aufgabe 32

(10 Punkte)

Die Hyperbelfunktionen *Sinus Hyperbolicus*, *Kosinus Hyperbolicus* und *Tangens Hyperbolicus* sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

- Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen definiert?
- Bestimmen Sie jeweils den Limes für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$.
- Zeigen Sie: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Aufgabe 33

(10 Punkte)

Berechnen Sie jeweils die Ableitung von

$$\text{a) } \sinh x, \quad \text{b) } \cosh x \quad \text{und} \quad \text{c) } \tanh x$$

Drücken Sie dabei die Ergebnisse in möglichst einfacher Form wieder mit Hilfe dieser drei hyperbolischen Funktionen aus. Skizzieren Sie nun die Graphen von \sinh , \cosh und \tanh . Auf welchen Teil-Intervallen ihres jeweiligen Definitionsbereichs sind die drei Funktionen streng monoton wachsend oder fallend? Geben Sie größtmögliche Intervalle an, auf denen die drei Funktionen injektiv sind, und schränken Sie die Wertebereiche so ein, dass die Funktionen dort auch surjektiv (und damit bijektiv) sind.

Aufgabe 34

(keine Abgabe)

Die Umkehrfunktion des *Sinus Hyperbolicus* heißt *Area Sinus Hyperbolicus*, Funktionsname Arsinh , d.h. $\text{Arsinh}(\sinh(x)) = x$, analog für die anderen hyperbolischen Funktionen. Geben Sie die maximalen Definitions- und Wertebereiche für

$$\text{a) } \text{Arsinh } x, \quad \text{b) } \text{Arcosh } x \quad \text{und} \quad \text{c) } \text{Artanh } x$$

an. Bei a und c ist dies eindeutig – bei b sind zwei Zweige anzugeben, analog zum Vorlesungsbeispiel $f(x) = x^2$ mit Umkehrfunktionen von $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ und von $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^-$.

Aufgabe 35

(10 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe von Satz 6 die Ableitungen von

$$\text{a) } \text{Arsinh } x, \quad \text{b) } \text{Arcosh } x \quad \text{und} \quad \text{c) } \text{Artanh } x.$$

BEMERKUNG: Sie benötigen dazu keine expliziten Darstellungen der Umkehrfunktionen, sondern lediglich die Ableitungen aus Aufgabe 33.

Aufgabe 36

(12 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 17.01.16 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Limits at infinity where x is unbounded,*
- *Find inverse values of functions,*
- *Find inverses of polynomial, radical, and rational functions,*
- *Rewrite logarithmic expressions using the properties of logarithms,*
- *Rational exponents and radicals und*
- *Single-step simplification of rational exponent expressions.*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).