

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 7 (Abgabe am 27.11.2015)

Aufgabe 37

(keine Abgabe)

Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie dort die Ableitung.

$$f_1(x) = 5^x, \quad f_2(x) = (\log(x^2))^3, \quad f_3(x) = \log_5(x), \quad f_4(x) := x^x.$$

Aufgabe 38

(6 Punkte)

Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ sowie $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$. HINWEIS: Die Regel von l'Hospital ist hilfreich.

Aufgabe 39

(12 Punkte)

Sei $T_n(x) := \cos(n \arccos x)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1, 1]$.

a) Zeigen Sie: $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

HINWEIS: Verwenden Sie das Additionstheorem für $\cos$, um $T_{n\pm 1}$ umzuschreiben.

b) Berechnen und zeichnen Sie T_ν für $\nu = 0, 1, 2, 3$.

HINWEIS: Berechnen Sie zunächst T_0 und T_1 und verwenden Sie dann Teil a.

c) Zeigen Sie, dass T_n der Differentialgleichung

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$

genügt, d.h. berechnen Sie T_n' und T_n'' , und setzen Sie ein.

HINWEIS: $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Aufgabe 40

(keine Abgabe)

Sei

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}.$$

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit (i) $f(x) = 1$, (ii) $f(x) = -1$ und (iii) $f(x) = 0$.

b) Skizzieren Sie den Graph von f .

c) Ist f in Null stetig? Argumentieren Sie mit ε und δ , und verwenden Sie dabei Ihre Ergebnisse aus Teil a.

Aufgabe 41

(20 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \quad \forall |x| < 1.$$

Bestimmen Sie *damit* die Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

$$\text{a) } \frac{1}{1+2x} \quad \text{b) } \frac{1}{1-x^3} \quad \text{c) } \frac{1}{x-5} \quad \text{d) } \frac{x}{1+x^2} \quad \text{e) } \frac{1+x}{1-x}$$

HINWEIS: Sie müssen (und sollen) keine Ableitungen berechnen.

Aufgabe 42

(8 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 17.01.16 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Graphs of sine and cosine*,
- *Manipulating trig expressions with pythagorean identities*,
- *Infinite geometric series* und
- *Understanding series*.

HINWEISE: (i) Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).

$$(ii) \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \quad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}.$$