Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 15/16

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 9 (Abgabe am 11.12.2015)

Zwischenumfrage zur Studie ***Übergang von Schule zu Hochschule in Mathematik***
Die meisten von Ihnen haben in der ersten Vorlesung bei der oben genannten Studie mitgemacht. Um den Verlauf während des Semesters besser nachvollziehen zu können, bittet Herr Dirk Miller Sie, an der Online-Zwischenumfrage http://www.unipark.de/uc/EBWB/69fd/ teilzunehmen. Die Bearbeitung der Umfrage wird ca. 3 bis 5 Minuten in Anspruch nehmen. Vielen Dank!

Aufgabe 48 (5 Punkte)

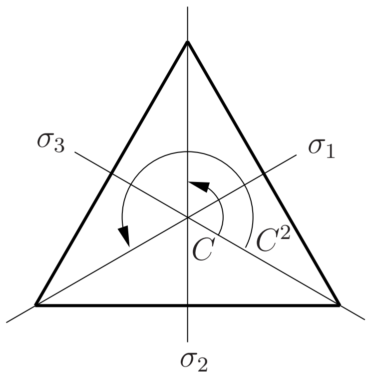
Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f_{ab} definiert durch

$$f_{ab}(x) \;=\; \frac{\sqrt{1+ax^4}}{1-x^2}\,\mathrm{e}^{-bx^2}$$

bei Null eine Maximum, für welche ein Minimum? Begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis: Berechnen Sie keine Ableitungen, verwenden Sie Taylorentwicklungen.

Aufgabe 49 (10 Punkte)

Wir betrachten die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks. Bezeichnen Sie die Spiegelungen an den Seitenhalbierenden mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, die 120°-Drehung um den Mittelpunkt mit C und die 240°-Drehung um den Mittelpunkt mit C^2 (wieso?). Bestimmen Sie die Gruppentafel. Dokumentieren Sie, wie Sie zu Ihrem Ergebnis gekommen sind. Ist die Gruppe abelsch?



Hinweis: Gehen Sie analog zum Vorlesungsbeispiel vor, in dem wir die Symmetriegruppe eines Rechtecks diskutiert haben.

Aufgabe 50 (keine Abgabe)

a) Zeigen Sie: Die Menge der bijektiven Abbildungen $f : [0,1] \to [0,1]$ bildet bezüglich der Komposition (also $(f \circ g)(x) = f(g(x))\ \forall\ x \in [0,1]$) eine Gruppe. Ist diese Gruppe abelsch?

b) Sei $G = \{e, a, b, c\}$ und seien $(G, \circ)$ sowie $(G, \odot)$ Gruppen mit neutralem Element e. Weiter gelte $a \circ a = c \circ c = b$ sowie $a \odot a = c \odot c = e$. Konstruieren Sie die Gruppentafeln für $(G, \circ)$ und $(G, \odot)$, und berechnen Sie $(a \circ b \circ c)^{-1}$ sowie $(a \odot b \odot c)^{-1}$. Sind die Gruppen abelsch?

Aufgabe 51 (10 Punkte)

Die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, genannt $C([a, b])$, ist ein Vektorraum über den reellen Zahlen. Für $x \in [-\pi, \pi]$ sei $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos x$ und $f_4(x) = \cos^2(\frac{x}{2})$. Zeigen Sie:

a) f_1, f_3, f_4 sind linear abhängig in $C([-\pi, \pi])$.
b) f_1, f_2, f_3 sind linear unabhängig in $C([-\pi, \pi])$.

HINWEIS: Nehmen Sie in Teil b an, die Funktionen seien linear abhängig und führen Sie dies zum Widerspruch!

Aufgabe 52 [1] (10 Zusatzpunkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, und stellen Sie – falls möglich – den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination dieser Vektoren dar.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 53 (6 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 17.01.16 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Graphically adding and subtracting vectors*,
- *Analyze the solutions of systems of equations algebraically* und
- *Systems of linear equations word problems.*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).

[1] Diese Aufgabe wird nicht in den Übungsgruppen besprochen. Das Vergleichen von Ergebnissen und die Diskussion von Lösungswegen, z.B. im Webforum, ist aber erwünscht und wird unterstützt.