Universität Tübingen, Mathematisches Institut | Wintersemester 15/16
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (keine Abgabe,
keine Besprechung in den Übungsgruppen, aber auszugsweise in der Vorlesung)

Aufgabe 60
Seien U und V Unterräume des $\mathbb{R}^{10}$ mit $\dim U = 7$ und $\dim V = 4$ sowie Basen $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_7$ von U und $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_4$ von V. Welche Werte kann

$$\dim \operatorname{span}\left(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_7, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_4\right)$$

annehmen (mit Begründung)? Geben Sie für jeden Fall explizit ein Beispiel an (z.B. durch Angabe geeigneter $\vec{a}_j$ und $\vec{b}_j$)!

Aufgabe 61
$V := \operatorname{span}(1, \sin(x), \cos(x))$ ist ein Unterraum von $C([-\pi, \pi])$ mit $\dim V = 3$ (vgl. Aufgabe 51). Sei $L : V \to V$ definiert durch $L(f) = f'' + f$. Sind die Mengen

$$U_1 := \{f \in V \mid L(f) = 0\} \qquad \text{und} \qquad U_2 := \{g \in V \mid \exists\, f \in V \text{ mit } L(f) = g\}$$

Unterräume von V? Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 62
Wir betrachten den Vektorraum $C([-1, 1])$ der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$ (vgl. Aufgaben 51 & 61). Sei $f_n(x) = x^n$. Offensichtlich gilt $f_n \in C([-1, 1])\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$. Auf $C([-1, 1])$ sei ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert, mit

$$\langle f_n, f_m \rangle = \frac{1 + (-1)^{n+m}}{n + m + 1} \qquad \forall\, n, m \in \mathbb{N}_0\,.$$

a) Berechnen Sie $\langle f_3 + f_1, 2f_2 - 6f_0 \rangle$.

Sei $U := \operatorname{span}(f_0, f_1, f_2, f_3)$.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.
c) Bestimmen Sie $\dim U$.
d) Sei $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ die Basis aus Teil b. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen P_0, P_1, P_2 und P_3 auf dem Intervall $[-1, 1]$.
e) Sei $g(x) = (x - 1)^2$. Drücken Sie g als Linearkombination der P_j aus.

Aufgabe 63
Gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ für beliebige $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 64
Sei

$$f(x) = \frac{\cos x}{1-x} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{\sin x}{x}\,,$$

stetig fortgesetzt wo nötig.

a) Berechnen Sie die Taylorreihe von f um Null.
b) Bestimmen Sie die 2016. Ableitung von g an der Stelle $x = 0$.
   HINWEIS: Die Taylorreihe um Null ist hilfreich.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!