Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 15/16

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 12 (Abgabe am 15.01.2016)

Aufgabe 65 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie eine ON-Basis für $U \subset \mathbb{R}^4$,

$$U = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine ON-Basis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts aus Aufgabe 59c. Beginnen Sie mit den l.u. Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 66 (keine Abgabe)

a) Die Lösungsmenge des folgenden LGS ist eine Ebene E_1 im $\mathbb{R}^3$,

$$3 + 2x_1 + 6x_2 = x_3 .$$

Geben Sie eine Parameterdarstellung sowie die Hessesche Normalform dieser Ebene an. Welchen Abstand hat die Ebene vom Ursprung?

b) Die Ebene E_2 im $\mathbb{R}^3$ ist durch

$$E_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = s \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

definiert. Geben Sie die Hessesche Normalform dieser Ebene an und berechnen Sie die Schnittmenge von E_2 und E_1.

Aufgabe 67 (keine Abgabe)

Bestimmen Sie die Polardarstellung der folgenden Punkte aus $\mathbb{R}^2$:

a) $(3, 4)$ b) $(4, -3)$ c) $(1, -2)$ d) $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

Geben Sie die folgenden Punkte aus $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) an:

e) $(3, 0, 0)$ f) $(0, 1, 0)$ g) $(2, 0, 2)$ h) $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$

Aufgabe 68 (10 Punkte)

Zeichnen Sie die folgende Kurve und berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}$ sowie deren Betrag $|\dot{\vec{x}}|$,

$$\vec{x}(t) = (1 + \cos t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Zeichnen Sie auch $\dot{\vec{x}}(0)$, $\dot{\vec{x}}(\frac{\pi}{2})$, und $\dot{\vec{x}}(\frac{3\pi}{2})$ als Tangentialvektoren ein.

Aufgabe 69 (10 Punkte)

Zeigen Sie: Die Einheitsvektoren für Kugelkoordinaten,

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

bilden (an jedem Punkt) (a) eine ONB des $\mathbb{R}^3$ und (b) ein Rechtssystem (in der angegebenen Reihenfolge). Berechnen Sie außerdem (c) die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten, d.h. berechnen Sie $\dot{\vec{x}}$ für

$$\vec{x}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \sin(\theta(t))\ \cos(\phi(t)) \\ \sin(\theta(t))\ \sin(\phi(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix},$$

und drücken Sie das Ergebnis als Linearkombination von $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ aus.