

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 13 (Abgabe am 22.01.2016)

Aufgabe 70¹

(10 Punkte)

Berechnen Sie – falls möglich – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- a) AA^T , b) $A^T A$, c) $AA^T B$, d) $A^T AB$,
e) $B^T AA^T$, f) A^2 , g) $A^T AA^T A$.

HINWEIS: Assoziativität ist hilfreich.

Aufgabe 71

(10 Punkte)

Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie damit die Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, $X \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ und $Y \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ von

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 3 & 5 \\ 0 & -5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad AY = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wie hätten Sie $\vec{x}$, X , oder Y bestimmen können, ohne zunächst A^{-1} zu berechnen?

Aufgabe 72

(10 Punkte)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $r^2 := x^2 + y^2 \neq 0$ und sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ x & y & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Bestimmen Sie } A^{-1}.$$

HINWEIS: Die Abkürzung $r^2 := x^2 + y^2$ ist geschickt, und das Ergebnis lässt sich besonders hübsch in der Form $A^{-1} = \frac{1}{r^2}(\dots)$ angeben.

¹Diese Aufgabe wird nicht in den Übungsgruppen besprochen. Das Vergleichen von Ergebnissen und die Diskussion von Lösungswegen, z.B. im Webforum, ist aber erwünscht und wird unterstützt.

Aufgabe 73

(keine Abgabe)

Sei $G = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A^T A = A A^T = I \right\}$ und sei $\cdot$ das Matrixprodukt.

- a) Sind $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ in G ?
- b) Zeigen Sie: $(G, \cdot)$ ist eine Gruppe.
- c) Ist $(G, \cdot)$ abelsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 74

(8 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 07.02.16 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Defined and undefined matrix operations,*
- *Multiply matrices by matrices ,*
- *Find the inverse of a 3x3 matrix*
- *Solving matrix equations.*

HINWEIS: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).