Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 15/16

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Klausur am 17.02.2016

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 106 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3} \quad \forall\, n \geq 2\,.$$

Aufgabe 2 (4+4+4 = 12 Punkte)
Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ b) $g(x) = x^x$ c) $h(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{5} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$

Aufgabe 3 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)
Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin(2x)}{x^3}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{x^2-\pi^2}{\sin x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^4+3x^2} - \sqrt{7+x^4}\right)$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^5}{x^4(x-\sin x)^2}$

Aufgabe 4 (4+4+4 = 12 Punkte)
Sein $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} 3^{\nu-2}$ b) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{10} \binom{9}{\nu-1} 3^{\nu-2}$ c) $\displaystyle\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{1}{n-\nu+1}$

Aufgabe 5 (4+4+4 = 12 Punkte)
Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1}{8-x^3}$ und b) $\dfrac{x}{(1-x)(1-2x)}$ um Null, sowie die Taylorreihe von

c) e^x um $x_0 = 42$, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 6 (1+3+2+2+3+4 = 15 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + x + x|x| - |x| + 2}{x} .$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f.
c) Berechnen Sie alle Nullstellen.
d) Berechnen Sie $f'(x)$.
e) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Sei $f(x) = |x + 2| \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ und sei

$$F(x) := \int_{-3}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t .$$

Bestimmen Sie $F(5) - F(1)$.

Aufgabe 8 (4+2+2+6+2+6 = 22 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) \qquad \text{und} \qquad \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

d.h. die Vektoren $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^4$, $j = 1, \ldots, 4$, bilden die Spalten der Matrix A.

a) Berechnen Sie $\det(A)$.
b) Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort in einem Satz.
c) Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$ linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort in einem Satz.
d) Berechnen Sie A^{-1}.
e) Bestimmen Sie alle Lösungen von $A\vec{x} = \vec{a}_5$.
f) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_5)$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Seien $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det A \neq 0 \neq \det B$ gegeben. Bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, die $(AB\vec{x}) \cdot (AB\vec{x}) + \vec{c}^{\,2} = -2\,\vec{c} \cdot (AB\vec{x})$ erfüllen.