Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 15/16

# Mathematik I für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 06.04.2016

---

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 109 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

---

**Aufgabe 1** (3+6 = 9 Punkte)
Seien $a_1 = a_2 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\ \forall\, n \geq 2$

a) Bestimmen Sie $a_3$, $a_4$ und $a_5$.
b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{2\nu-1} = a_{2n} \quad \forall\, n \geq 1\,.$$

**Aufgabe 2** (4+4+4 = 12 Punkte)
Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \log\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)$ b) $g(x) = x^{2x}$ c) $h(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$

**Aufgabe 3** (3+3+3+3+3+3 = 18 Punkte)
Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{x\to-2} \frac{x^4+16}{x+2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x\sin x + 3x^3}{7x^3-2x^2}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x\sin x + 3x^3}{7x^3-2x^2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{x-1}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \big(\log(x+2x^5) - \log(x^5-3)\big)$ f) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{(\mathrm{e}^x \sin x)^{10}}{(1-\cos x)^5}$

**Aufgabe 4** (4+4+4 = 12 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{100} (-1)^\nu$ b) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{2n} \binom{2n}{\nu} (-1)^\nu$ c) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu\, 3^{\nu+\mu}}{\nu!\,\mu!}$

**Aufgabe 5** (6 Punkte)
Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to f(D)$ bijektiv mit $f'(x) = [f(x)]^2 + 7$. Bestimmen Sie ${f^{-1}}'(x)$.

**Aufgabe 6** (4+4+4= 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1}{25+x^2}$ und b) $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ um Null, sowie die Taylorreihe von c) $\log x$ um $x_0 = 42$,

und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Zur Erinnerung: $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} \quad \forall\, |x| < 1.$

**Aufgabe 7** (1+3+1+4+3+4 = 16 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + x + x|x| - |x| + 2}\,.$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten von $f$.
c) Berechnen Sie alle Nullstellen.
d) Berechnen Sie $f'(x)$.
e) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.

**Aufgabe 8** (3+1+4+4 = 12 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Bemerkung: $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$ etc.

a) Berechnen Sie $A^2$, $A^3$ und $A^4$.
b) Bestimmen Sie $A^{-1}$.
c) Bestimmen Sie $A^n$ für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$.
d) Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $\mathrm{e}^{Ax} := \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} A^n$. Bestimmen Sie $\mathrm{e}^{Ax}$ und bringen Sie das Ergebnis in die Form $\mathrm{e}^{Ax} = f(x) \cdot I + g(x) \cdot A$, d.h. geben Sie $f(x)$ und $g(x)$ an.

**Aufgabe 9** (4+2+2+4 = 12 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) \qquad \text{und} \qquad \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h. die Vektoren $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^4$, $j = 1, \ldots, 4$, bilden die Spalten der Matrix $A$.

a) Berechnen Sie $\det(A)$.
b) Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort in einem Satz.
c) Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort in einem Satz.
d) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_5)$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$.