Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 16/17
Dr. Stefan Keppeler & Julian Schmidt

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

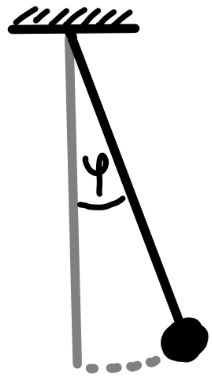
Übungsblatt 1 (Besprechung am 26.10.2016)

Aufgabe 1 (Phasenraumportrait des Doppelmuldenpotentials)
Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\ddot{x} \;=\; -x^3 \,+\, a\,x\,.$$

Schreiben Sie die Gleichung als System erster Ordnung, bestimmen Sie die Fixpunkte (d.h. die Nullstellen des entsprechenden Vekorfeldes) der Gleichung und skizzieren Sie das Phasenraumportrait in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 2 (Gekickter Rotor)



Wir betrachten zunächst eine Punktmasse, befestigt am Ende eines masselosen Stabs; das andere Ende des Stabs sei fixiert – genau wie beim *starren Pendel* im Prolog zur Vorlesung, allerdings ohne Schwerkraft. Wir beschreiben die Konfiguration durch den Winkel φ (modulo 2π), d.h. der Konfigurationsraum ist wieder isomorph zu S^1. Die Bewegungsgleichung lautet $\ddot{\varphi} = 0$, oder, geschrieben als System erster Ordnung,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{\varphi}\\ 0\end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie alle Lösungen an.

Nun "schalten" wir periodisch für jeweils einen kurzen Augenblick die Schwerkraft ein, so dass die Masse einen Schubs (Kick) nach unten bekommt. Idealisiert sei die Einwirkzeit so kurz, dass sich lediglich die Geschwindigkeit unmittelbar nach dem Kick von der vor dem Kick unterscheidet. Für Kicks zu den Zeiten $t = nT$, $n \in \mathbb{Z}$, $T > 0$ fest, gelte also

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\begin{pmatrix}\varphi(nT+\varepsilon)\\ \dot{\varphi}(nT+\varepsilon)\end{pmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\begin{pmatrix}\varphi(nT-\varepsilon)\\ \dot{\varphi}(nT-\varepsilon) + k\sin(\varphi(nT-\varepsilon))\end{pmatrix}.$$

Dabei charakterisiert k die Stärke des Kicks. Wir definieren

$$\begin{pmatrix}x_n\\ \xi_n\end{pmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\begin{pmatrix}\varphi(nT+\varepsilon)\\ \dot{\varphi}(nT+\varepsilon)\end{pmatrix}$$

b) Finden Sie eine Rekursionsgleichung für die Folge (x_n, ξ_n).

Betrachten Sie nun nochmals den Fall $k = 0$. Setzen Sie außerdem $T = 1$.

c) Für welche Anfangswerte (x_0, ξ_0) liegen Fixpunkte vor, d.h. wann gilt $(x_{n+1}, \xi_{n+1}) = (x_n, \xi_n)$?
d) Für welche Anfangswerte (x_0, ξ_0) liegen periodische Punkte mit Periode $N \in \mathbb{N}$ vor, d.h. wann gilt $(x_{n+N}, \xi_{n+N}) = (x_n, \xi_n)$?
e) Skizzieren Sie die Folge (x_n, ξ_n) für unterschiedliche Anfangsbedingungen. Was passiert (qualitativ) für $\xi_0 \notin 2\pi\mathbb{Q}$?