

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 3 (Besprechung am 09.11.2016)

Aufgabe 6 (Tangentialraum und Tangentialabbildung)

- a) Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung eingeführte Tangentialraum $T_x M$ an eine Mannigfaltigkeit M im Punkt x ein n -dimensionaler reeller Vektorraum ist.

ANLEITUNG: Zeigen Sie zunächst, dass für jede Karte (V, φ) mit $x \in V$ die Abbildung

$$T\varphi : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad [c]_x \mapsto \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ c)(t) \right|_{t=0}$$

bijektiv ist. Zeigen Sie dann, dass die durch $T\varphi$ auf $T_x M$ induzierte Vektorraumstruktur unabhängig von φ ist.

- b) Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung eingeführte Tangentialabbildung wohldefiniert ist.

Aufgabe 7 (Die orthogonalen Matrizen als Mannigfaltigkeit)

Zeigen Sie, dass die orthogonalen Matrizen $O(n) := \{Q \in GL(n) \mid Q^T Q = \text{Id}\}$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ von $GL(n)$ bilden. Weiterhin gilt (warum?)

$$T_Q O(n) = \{B \mid (Q^{-1} B)^T = -Q^{-1} B\},$$

also insbesondere

$$T_{\text{Id}} O(n) = \{B \mid B^T = -B\} =: \text{Schief}(n).$$

HINWEIS: Finden Sie eine Submersion $F : GL(n) \rightarrow \text{Sym}(n)$ in die symmetrischen Matrizen $\text{Sym}(n)$ mit $F^{-1}(0) = O(n)$. Verwenden Sie dann Definition 1.8 und Bemerkung 1.24 aus der Vorlesung.

Aufgabe 8 (Lokaler Umkehrsatz)

Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension n . Für ein $p \in M$ sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, so dass $Tf|_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ein Isomorphismus ist. Zeigen Sie unter Verwendung des Umkehrsatzes im $\mathbb{R}^n$, dass es eine offene Umgebung $U \subset M$ von p gibt, so dass $V := f(U)$ offen und $f : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist.