Universität Tübingen, Mathematisches Institut — Wintersemester 16/17
Dr. Stefan Keppeler & Julian Schmidt

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 4 (Besprechung am 16.11.2016)

Aufgabe 9 (Das Tangentialbündel)
Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und TM das zugehörige Tangentenbündel.

a) Zeigen Sie, dass M diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit von TM ist.
b) Zeigen Sie: TM ist genau dann trivialisierbar, wenn es n punktweise linear unabhängige Vektorfelder auf M gibt.

Aufgabe 10 (Lie-Ableitungen)
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Lie-Ableitung:

a) $L_X(f+g) = L_X f \,+\, L_X g$
b) $L_X(fg) = (L_X f)g \,+\, f(L_X g)$
c) $L_{\alpha X+\beta Y}(f) = \alpha\, L_X f \,+\, \beta\, L_Y f$

für $f, g, \alpha, \beta \in C^\infty(M)$ und $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$.

Aufgabe 11 (Derivationen als Vektorfelder)
Sei $L : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ mit

a) $L\,(\alpha f + g) = \alpha L f \,+\, Lg$
b) $L\,(fg) = (Lf)g \,+\, f(Lg)$

für alle $f, g \in C^\infty(M)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass ein $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ gibt, so dass $L = L_X$.

Anleitung: Zeigen Sie zunächst, dass $L(\text{const.}) = 0$ ist. Verwenden Sie dann lokale Koordinaten, führen Sie eine Taylorentwicklung durch und argumentieren Sie, wie L auf die einzelnen Terme wirkt.

Aufgabe 12 (Der Kommutator von Vektorfeldern)
Seien $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$. Zeigen Sie, dass es ein $Z \in \mathcal{T}_0^1(M)$ gibt, so dass

$$L_X \circ L_Y \,-\, L_Y \circ L_X \;=\; L_Z .$$

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis von Aufgabe 11.

Aufgabe 13 (Die Standard-Abbildung)
Das Studium des gekickten Rotors in Aufgabe 2 hat uns zur Abbildung

$$\begin{aligned} F : S^1 \times \mathbb{R} &\to S^1 \times \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x+\xi \\ \xi + k\sin(x+\xi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

geführt.

a) Überzeugen Sie sich davon, dass $F \circ \tau = \tau \circ F$, wobei $\tau : \left(\begin{smallmatrix} x \\ \xi \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x \\ \xi+2\pi \end{smallmatrix}\right)$ eine Translation um 2π in ξ-Richtung ist.

Im Folgenden untersuchen wir daher die sogenannte Standard-Abbildung

$$\begin{aligned} S^1 \times S^1 &\to S^1 \times S^1 \\ \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x+\xi \\ \xi + k\sin(x+\xi) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

die wir ebenfalls mit F bezeichnen; d.h. wir betrachten nicht nur die x- sondern auch die ξ-Koordinate modulo 2π.

b) Illustrieren Sie mithilfe eines Computer-Programms das Verhalten von Lösungsfolgen $\left(F^n\left(\begin{smallmatrix} x \\ \xi \end{smallmatrix}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für verschiedene Werte des Kick-Parameters k.

Hinweis: Das folgende Programm läuft z.B. in `GNU Octave`[1] oder in Matlab[2]. Es plottet $\left(F^n\left(\begin{smallmatrix} x \\ \xi \end{smallmatrix}\right)\right)_{n=0\dots500}$ für 150 zufällig gewählte Startpunkte $\left(\begin{smallmatrix} x \\ \xi \end{smallmatrix}\right)$.

```
num_points=150;
iterations=500;
k=.5;

x=rand(1,num_points)*2*pi;
xi=rand(1,num_points)*2*pi;
plot(x,xi,'b.','MarkerSize',2)
axis([0 2*pi 0 2*pi])
for n=1:iterations
  [x,xi]=standard_map(k,x,xi);
  hold on
  plot(x,xi,'b.','MarkerSize',2)
  hold off
  drawnow
end
```

Das Programm verwendet die Funktion `standard_map.m`, die sich im aktuellen Arbeitsverzeichnis befinden muss:

```
function [X,Xi]=standard_map(k,x,xi)
  X = mod(x+xi,2*pi);
  Xi = mod(xi+k*sin(x+xi),2*pi);
end
```

[1] Freie Sofware, erhältlich auf: `www.gnu.org/software/octave/`

[2] Kommerzielle Software, die Sie als Student*innen der Universität Tübingen unter einer Campus-Lizenz verweden dürfen, siehe: `https://campussoftware.zdv.uni-tuebingen.de/`