Universität Tübingen, Mathematisches Institut

Dr. Stefan Keppeler & Julian Schmidt

Wintersemester 16/17

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 5 (Besprechung am 23.11.2016)

Aufgabe 14 (Flüsse)

Sei $M := \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| < 1\}$. Geben Sie jeweils ein nichttriviales Vektorfeld $Z \in \mathcal{T}_0^1(M)$ und den zugehörigen Fluss $\Phi^Z : D \to M$ mit dem Definitionsbereich D an, so dass gilt:

a) Z ist vollständig,

b) Z ist nicht vollständig.

Aufgabe 15 (Linearisierung von Vektorfeldern an Fixpunkten

Sei $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ ein glattes Vektorfeld und $x_0 \in M$ eine Nullstelle von X, d.h. $X(x_0) = (x_0, 0)$. In einer Karte φ mit $\varphi(x_0) = 0$ sei

$$X_\varphi(q) = DX_\varphi(0)\, q + \mathcal{O}(\|q\|^2)$$

die Taylorentwicklung von $X_\varphi := I \circ \varphi_* X$ bei 0. Hier bezeichnet Df wie üblich das Differential einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, also die Matrix mit Einträgen $Df(q)_{ij} = \partial_{q_j} f_i(q)$. Sei ψ eine weitere Karte mit $\psi(x_0) = 0$ und $\Phi = \psi \circ \varphi^{-1}$ der Kartenwechsel. Zeigen Sie, dass

$$DX_\psi(0) = D\Phi(0)\, DX_\varphi(0)\, D\Phi(0)^{-1}$$

gilt, und folgern Sie, dass die Eigenwerte der Linearisierung $DX_\varphi(0)$ unabhängig von der Wahl der Karte sind.

Aufgabe 16 (Fixpunkte: Gradientenfelder und Hamiltonsche Vektorfelder)

Sei $M = \mathbb{R}^2$ mit Koordinaten $(q, p) \in \mathbb{R}^2$ und $F, H \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Diskutieren Sie die Möglichkeiten für das lokale Verhalten bei Fixpunkten für die folgenden Vektorfelder durch Betrachtung der linearen Approximation im Fixpunkt. Skizzieren Sie jeweils den lokalen Fluss und das Vektorfeld.

a) Gradientenfeld:

$$Y(q,p) \;:=\; \begin{pmatrix} \partial_q F(q,p) \\ \partial_p F(q,p) \end{pmatrix}$$

b) Hamiltonsches Vektorfeld:

$$X(q,p) \;:=\; \begin{pmatrix} \partial_p H(q,p) \\ -\partial_q H(q,p) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 17 (Lineare Stabilität: Standard-Abbildung)
Sei F wieder die Standard-Abbildung (vgl. Aufgabe 13),

$$\begin{aligned} F : S^1 \times S^1 &\to S^1 \times S^1 \\ \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x+\xi \\ \xi + k\sin(x+\xi) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

a) Wir interessieren uns nun für Punkte, die für *jedes* $k \geq 0$ Fixpunkte oder periodische Punkte von F sind. Finden Sie alle solchen Fixpunkte sowie alle periodischen Punkte mit Periode 2 und $\xi = \pi$, d.h. bestimmen Sie alle Lösungen von

$$F\left(\begin{smallmatrix} x \\ \xi \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ \xi \end{smallmatrix}\right) \ \forall k \quad \text{bzw.} \quad F^2\left(\begin{smallmatrix} x \\ \pi \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ \pi \end{smallmatrix}\right) \ \forall k .$$

b) Untersuchen Sie das lokale Verhalten von F in der Nähe der Fixpunkte und periodischen Punkte $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ \xi_0 \end{smallmatrix}\right)$ aus Teil (a), d.h. betrachten Sie die linearisierte Abbildung

$$F\left(\begin{smallmatrix} x \\ \xi \end{smallmatrix}\right) = F\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ \xi_0 \end{smallmatrix}\right) + F'\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ \xi_0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x-x_0 \\ \xi-\xi_0 \end{smallmatrix}\right) + \mathcal{O}\left((\xi-\xi_0)^2 + (x-x_0)^2\right) ,$$

und bestimmen Sie die Eigenwerte von $F'\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ \xi_0 \end{smallmatrix}\right)$.

c) Illustrieren Sie die Ergebnisse aus Teil (b), mithilfe eines Comupter-Programms (siehe Aufgabe 13), d.h. plotten Sie Phasenportraits in der Nähe der $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ \xi_0 \end{smallmatrix}\right)$ für interessante Werte des Parameters k.

Aufgabe 18 (Transportgleichung)
Sei X ein vollständiges Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M und Φ_t^X der zugehörige Fluss. Sei weiter $\tau_t^X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ definiert durch

$$\tau_t^X(f) \ := \ f \circ \Phi_t^X .$$

Zeigen Sie, dass punktweise auf der Mannigfaltigkeit gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tau_t^X(f)|_{t=0} \ = \ L_X f .$$