Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 16/17
Dr. Stefan Keppeler & Julian Schmidt

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 6 (Besprechung am 30.11.2016)

Aufgabe 19 (Basiswechsel)
Sei T_0^1 ein n-dimensionaler Vektorraum und T_1^0 sein Dualraum. Sei $(e_j)_{j=1,\ldots,n}$ eine Basis von T_0^1 und $(e^j)_{j=1,\ldots,n}$ die duale Basis von T_1^0 definiert durch $e^j(e_i) := \delta_{ij}$. Sei $A : T_0^1 \to T_0^1$ ein Basiwechsel mit Matrix a^i_j bzgl. der Basis $(e_j)_{j=1,\ldots,n}$ und $\hat{e}_j := Ae_j$ die neuen Basisvektoren, also $\hat{e}_j = a^i_j \, e_i$.

a) Zeigen Sie, dass die Spur von $t \in T_1^1$, definiert durch

$$\mathrm{tr}(t) \;=\; t(e^j, e_j)$$

unabhängig von der Wahl der Basis ist, d.h. zeigen Sie $t(e^j, e_j) = t(\hat{e}^j, \hat{e}_j)$.

Sei im Folgenden außerdem $g \in T_2^0$ nicht entartet.

b) Zeigen Sie, dass die metrische Spur von $t \in T_0^2$, definiert durch

$$\mathrm{tr}_g(t) \;:=\; t(e^j, \iota_g(e_j))\,,$$

ebenfalls nicht von der Wahl der Basis abhängt.
Wie verhält sich dagegen $t(e^j, e^j)$ unter Basiswechseln?

Aufgabe 20 (Kanonische Volumenform)
Sei $g \in T_2^0$ nicht-entartet, $(e^j)_{j=1,\ldots,n}$ eine Basis von T_1^0 und $g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\, e^i \otimes e^j$. Zeigen Sie, dass die kanonische Volumenform $\varepsilon := \sqrt{|\det g_{ij}|}\, e^1 \wedge e^2 \wedge \ldots \wedge e^n$ bis auf das Vorzeichen unabhängig von der Wahl der Basis ist.

Aufgabe 21 (Isometrien des Minkowskiraums)
Sei $T^1_0 = \mathbb{R}^4$ und $\eta \in T^0_2$ die Minkowski-Metrik darauf, d.h. $\eta_{ij} = \sigma_i \delta_{ij}$ und $\sigma_1 = 1$, $\sigma_{i \neq 1} = -1$.

a) Sei $\Lambda \in T^1_1$. Machen Sie sich klar, dass Λ eine lineare Abbildung $\Lambda : T^1_0 \to T^1_0$ definiert. Zeigen Sie, dass Λ genau dann eine Isometrie ist, also $\eta(\Lambda v, \Lambda v) = \eta(v, v)$ für alle $v \in T^1_0$, wenn

$$\Lambda^i_k \eta_{ij} \Lambda^j_\ell = \eta_{k\ell} \qquad \text{also} \qquad \Lambda^T \, \eta \, \Lambda \; = \; \eta.$$

Machen Sie sich klar, dass in dieser Notation die darstellende Matrix $\Lambda_{ij} = \Lambda^i_j$ (also Zeilenindex oben und Spaltenindex unten) geschrieben wird.

b) Zeigen Sie, dass sowohl eine orthogonale Transformation in der zweiten bis vierten Koordinate, d.h.

$$R \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

für ein $r \in \mathrm{O}(3)$, als auch der s-Boost in x-Richtung, d.h.

$$B^s_x \; = \; \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s & 0 & 0 \\ \sinh s & \cosh s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Isometrien des Minkowskiraums sind. Folgern Sie, dass die speziellen Lorentztransformationen gegeben durch

$$\Lambda \; = \; R_1 \, B^s_x \, R_2$$

ebenfalls Isometrien sind.