Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 16/17
Dr. Stefan Keppeler & Julian Schmidt

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 7 (Besprechung am 07.12.2016)

Aufgabe 22 (Pull-Back und äußere Ableitung)
Sei $f : M_1 \to M_2$ glatt und $g \in C^\infty(M_2)$. Zeigen Sie, dass

$$f^* \, \mathrm{d}g \; = \; \mathrm{d}\,(f^* \, g)\,.$$

Aufgabe 23 (Polarkoordinaten)
Sei $M = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0) | \, x \leq 0\}$. Auf M sind die natürliche Karte $\varphi : M \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0) | \, x \leq 0\}$, $\varphi = \mathrm{id}$ und die Karte zu Polarkoordinaten $\tilde{\varphi} : M \to (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$, also

$$\tilde{\varphi}^{-1}(r,\alpha) \; = \; (r\cos\alpha, r\sin\alpha)\,,$$

verträglich. Drücken Sie $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ durch $\mathrm{d}r$ und $\mathrm{d}\alpha$ aus. Sei g die euklidische Metrik auf M, d.h.

$$g \; = \; \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x \, + \, \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y.$$

Wie sieht g in der durch $\mathrm{d}r$ und $\mathrm{d}\alpha$ erzeugten Basis von $\mathcal{T}_2^0(M)$ aus?

Aufgabe 24 (Der Hodge-Operator)
In dieser Aufgabe zeigen wir, dass der Hodge-Operator $*$ auf Λ_k für symmetrisches, nichtentartetes $g \in T_2^0$ die Gleichung

$$* \circ * \; = \; (-1)^{k\,(n-k)} \operatorname{sgn}(g) \qquad (+)$$

erfüllt, wobei $\operatorname{sgn}(g)$ das Vorzeichen der Determinante von g ist.

a) Machen Sie sich zunächst klar, dass es eine Basis (e^j) von T_1^0 gibt, in der die Matrix g_{ij} von $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$ diagonal ist, d.h. $g_{ij} = 0$ falls $i \neq j$.
b) Sei $0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ ein geordnetes k-Tupel mit $j_i \in \{1,\ldots,n\}$. Bestimmen Sie $*(e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}) := i_{e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}} \varepsilon$, wobei (e^j) die Basis aus (a) sei.
c) Zeigen Sie nun Gleichung (+).

Aufgabe 25 (Hodge-Dualität im Minkowskiraum
Sei $*$ der Hodgeoperator bzgl. der Minkowski-Metrik η im $\mathbb{R}^4$, wobei wir die kanonischen Koordinaten mit (t, x_1, x_2, x_3) bezeichnen, also $\eta = \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \sum_{i=1}^3 \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^i$. Berechnen Sie die Bilder der kanonischen Basisvektoren von $\Lambda_k(\mathbb{R}^4)$ für alle $k \leq 4$.

Hinweis: Sparen Sie Arbeit durch Anwenden von Formel (+) aus aus Aufgabe 24.

Aufgabe 26 (Die Maxwell-Gleichungen)
Sei $*$ der Hodgeoperator bzgl. der Minkowski-Metrik η im $\mathbb{R}^4$. Das elektrische Feld E, das magnetische Feld B und die Stromdichte J seien zeitabhängige Vektorfelder auf dem $\mathbb{R}^3$, also

$$E, B, J : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

und die Ladungsdichte $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Alle Abbildungen werden als glatt vorausgesetzt. Man definiert die zugehörigen Differentialformen auf dem Minkowskiraum $\mathcal{J}, \mathcal{E} \in \Lambda_1(\mathbb{R}^4)$ und $\mathcal{B}, \mathcal{F} \in \Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &:= \rho\,\mathrm{d}t \,-\, J_i\,\mathrm{d}x^i, \\ \mathcal{E} &:= E_i\,\mathrm{d}x^i, \\ \mathcal{B} &:= *\,(-B_i\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^i), \\ \mathcal{F} &:= \mathcal{B} - \mathrm{d}t \wedge \mathcal{E}\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie die folgenden beiden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} + \mathrm{rot}E \,=\, 0 \quad &\& \quad \mathrm{div}B \,=\, 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{d}\mathcal{F} \,=\, 0, \\ -\frac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{rot}B \,=\, J \quad &\& \quad \mathrm{div}E \,=\, \rho \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{d}(*\mathcal{F}) \,=\, *\mathcal{J}. \end{aligned}$$

Die Maxwell-Gleichungen (linke Seite) haben also für die zugehörigen Differentialformen eine sehr einfache Form.