

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 8 (Besprechung am 14.12.2016)

Aufgabe 27 (Äußere Ableitung und Dachprodukt)

Seien $\omega_1 \in \Lambda_p(M)$ und $\omega_2 \in \Lambda_k(M)$. Zeigen Sie, dass

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

Aufgabe 28 (Die Kontinuitätsgleichung)

Sei $*$ der Hodgeoperator bzgl. der Minkowski-Metrik im $\mathbb{R}^4$. Weiter seien der Strom $J : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und die Ladungsdichte $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Wir definieren wieder die zugehörige 1-Form $\mathcal{J} \in \Lambda_1(\mathbb{R}^4)$ durch

$$\mathcal{J} := \rho dt - J_i dx^i.$$

Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} J = 0$$

äquivalent zu $d*\mathcal{J} = 0$ ist. Zeigen Sie weiter, dass die inhomogene Maxwellgleichung $d*\mathcal{F} = *\mathcal{J}$ genau dann eine Lösung $\mathcal{F}$ besitzt, wenn der Viererstrom $\mathcal{J}$ die Kontinuitätsgleichung erfüllt. Ist die Lösung eindeutig?

Aufgabe 29 (Potentiale und Maxwellgleichungen)

Wir betrachten wieder die Maxwellgleichungen und übernehmen die Notation aus den Aufgaben 26 und 28. Weiter sei

$$\delta : \Lambda_p(\mathbb{R}^4) \rightarrow \Lambda_{p-1}(\mathbb{R}^4), \quad \omega \mapsto \delta\omega := (-1)^p *^{-1} d * \omega = * d *$$

die Koableitung, wobei die letzte Gleichheit speziell für den $\mathbb{R}^4$ mit der Minkowskimetrik gilt, vgl. Aufgabe 24. Es erfülle $\mathcal{A} \in \Lambda_1(\mathbb{R}^4)$ die Wellengleichung

$$\square \mathcal{A} := (\delta d + d\delta)\mathcal{A} = \mathcal{J}$$

und die Lorenz-Eichung $\delta\mathcal{A} = 0$. Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ die Maxwellgleichungen löst. Schreiben Sie beide Gleichungen für

$$\mathcal{A} = A_0 dt + A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3$$

in Komponenten.

Aufgabe 30 (Eigenschaften der Lie-Ableitung)

Zeigen Sie, dass für alle $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$, $t \in \mathcal{T}_s^r(M)$, $c \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Lambda_k(M)$ und $f \in \Lambda_0(M)$ gilt:

- a) $L_{X+Y}t = L_X t + L_Y t$
- b) $L_{cX}t = c L_X t$
- c) $L_{fX}\omega = f L_X \omega + df \wedge i_X \omega$