Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 16/17
Dr. Stefan Keppeler & Julian Schmidt

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 9 (Besprechung am 21.12.2016)

Aufgabe 31 (Kommutator und Jacobi-Identität)
Sei $t \in \mathcal{T}^r_s(M)$. Zeigen Sie, dass für alle $X, Y, Z \in \mathcal{T}^1_0$

a) $L_{[X,Y]}\, t = (L_X L_Y \,-\, L_Y L_X)\, t$ und

b) $0 = \big[X, [Y, Z]\big] \,+\, \big[Y, [Z, X]\big] \,+\, \big[Z, [X, Y]\big]$

gilt.

Aufgabe 32 (Lie-Klammer und Vertauschbarkeit von Flüssen)
Seien $X, Y \in \mathcal{T}^1_0(M)$ vollständige Vektorfelder mit $[X, Y] = 0$. Zeigen Sie, dass dann auch die zugehörigen Flüsse vertauschen, d.h.

$$\Phi^X_t \circ \Phi^Y_s = \Phi^Y_s \circ \Phi^X_t \qquad \forall\, t, s \in \mathbb{R}\,.$$

Gehen Sie z.B. wie folgt vor:

- Zeigen Sie zunächst, dass $(\Phi^X_t)^*\, Y = Y \;\forall\, t \in \mathbb{R}$.
  Hinweis: Man kann zeigen, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi^X_t)^*\, Y = 0$, falls $[X, Y] = 0$; denken Sie dabei an die Definition der Lie-Ableitung.
- Verwenden Sie dann, dass für beliebige Diffeomorphsimen $\psi : M \to M$ die Beziehung $\psi \circ \Phi^Y_s = \Phi^{\psi_* Y}_s \circ \psi$ gilt (vgl. Bemerkung 1.98(a) im Skript).

Aufgabe 33 Integral geschlossener Formen über diffeotope Abbildungen
Es seien $N_0 = \psi_0(N) \subset M$ und $N_1 = \psi_1(N) \subset M$ jeweils das glatte Bild einer p-dimensionalen, kompakten, orientierbaren, randlosen Mannigfaltigkeit N in der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, also $\psi_0 : N \to M$ und $\psi_1 : N \to M$ glatte Abbildungen. Es seien ψ_0 und ψ_1 diffeotop, d.h. es gibt ein glattes $F : [0, 1] \times N \to M$ so, dass

$$\psi_0 = F \circ \iota_0 : N \to N_0 \quad \text{ und } \quad \psi_1 = F \circ \iota_1 : N \to N_1\,,$$

wobei ι_0 und ι_1 jeweils die Injektion von N in $\{0\} \times N$ bzw. $\{1\} \times N$ ist. Zeigen Sie, dass für jede geschlossene p-Form $\omega \in \Lambda_p(M)$ gilt:

$$\int_{N_0} \omega = \int_{N_1} \omega\,, \qquad \text{wobei} \qquad \int_{N_j} \omega := \int_N \psi_j^* \omega\,.$$

Überlegen Sie sich, wie die Aussage und der Beweis für eine Mannigfaltigkeit N mit Rand zu modifizieren sind.

Hinweise: Die Aussage ist per Definition äquivalent zu $\int_N \psi_0^* \omega = \int_N \psi_1^* \omega$. Um letzteres zu zeigen, betrachten Sie die Form $F^* \omega \in \Lambda_p([0, 1] \times N)$ und wenden Sie den Homotopie-Operator $\mathrm{d} \circ K + K \circ \mathrm{d}$ aus dem Beweis des Poincaré-Lemmas (Vorlesung, nicht Skript) darauf an, um zu folgern, dass $(\psi_0^* - \psi_1^*)\omega$ exakt ist. Dann liefert der Satz von Stokes die gewünschte Aussage.