Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 16/17
Dr. Stefan Keppeler & Julian Schmidt

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 10 (Besprechung am 11.01.2017)

Aufgabe 34 (Satz vom Igel)
Zeigen Sie, dass man einen Igel nicht frisieren kann, also die Gültigkeit der folgenden Aussage: Auf der n-dimensionalen Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \|x\| = 1\}$ hat für gerade Dimension n jedes glatte Vektorfeld $X \in \mathcal{T}_0^1(S^n)$ mindestens eine Nullstelle.

Anleitung: Nehmen Sie an, es gäbe ein X ohne Nullstelle, dann können sie es o.B.d.A. auf $\|X\|_{\mathbb{R}^{n+1}} = 1$ normieren. Verwenden Sie die Eigenschaft $\langle X(x), x\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0$ um eine Diffeotopie $F : [0,1] \times S^n \to S^n$ zwischen $\psi_0 : S^n \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\psi_0(x) = x$ und $\psi_1 : S^n \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\psi_1(x) = -x$, zu konstruieren. Finden Sie eine nirgends verschwindende Volumenform ω auf S^n, z.B. unter Verwendung des äußeren Normalenfeldes $n(x) = x$ an S^n und der kanonischen Volumenform ε auf $\mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie schließlich, dass ψ_1 für gerades n die Orientierung umkehrt, also

$$\int_{S^n} \omega = \int_{S^n} \psi_0^* \omega = -\int_{S^n} \psi_1^* \omega \,,$$

und führen Sie dies zum Widerspruch.

Aufgabe 35 (Brouwerscher Fixpunktsatz für glatte Abbildungen)
Sei $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x\| \leq 1\}$ die Vollkugel im $\mathbb{R}^n$ und $S^{n-1} = \partial D^n$ ihr Rand, die $n-1$-Sphäre. Sei $f : D^n \to D^n$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass f mindestens einen Fixpunkt besitzt, es also mindestens ein $x \in D^n$ mit $x = f(x)$ gibt.

Anleitung: Angenommen, es gibt keinen solchen Fixpunkt. Dann ist die Funktion $F : D^n \to S^{n-1}$ wohldefiniert, die jedem Punkt x den Schnittpunkt der in $f(x)$ startenden und durch x gehenden offenen Halbgerade mit S^{n-1} zuordnet. Es wirkt F auf $S^{n-1} \subset D^n$ also als Identität, d.h. $F \circ \iota = \mathrm{Id}$, wobei $\iota : S^{n-1} \to D^n$ die natürliche Injektion sei. Wenden Sie den Satz von Stokes auf $\omega := F^*\varepsilon$ an, um einen Widerspruch zu erhalten.

Bemerkung: Der Brouwersche Fixpunktsatz ist die Verallgemeinerung dieses Resultats auf stetige Funktionen f, wobei man im Beweis den Dichtheitssatz von Stone-Weierstrass verwendet.

Aufgabe 36 (Symplektische Endomorphismen 1)
Sei $J \in \mathcal{M}(2n, \mathbb{R})$ schiefsymetrisch, d.h. $J^T = -J$, mit vollem Rang. Weiter seien

$$\mathrm{sp}(2n) = \left\{B \in \mathcal{M}(2n,\mathbb{R}) \,|\, B^T J + JB = 0\right\} \quad \text{und}$$
$$\mathrm{Sp}(2n) = \left\{A \in \mathcal{M}(2n,\mathbb{R}) \,|\, A^T J A = J\right\} \,.$$

a) Zeigen Sie: $\mathrm{Sp}(2n)$ ist eine Gruppe bezüglich der Matrix-Multiplikation.
b) Sei $\Phi_t^{X_H} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ ein linearer Hamiltonscher Fluss, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi_t^{X_H} = B \Phi_t^{X_H} \quad \text{mit} \quad B \in \mathrm{sp}(2n) \,.$$

Zeigen Sie: $\Phi_t^{X_H} \in \mathrm{Sp}(2n) \;\forall\, t \in \mathbb{R}$.