Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler & Julian Schmidt Wintersemester 16/17

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 11 (Besprechung am 18.01.2017)

Aufgabe 37 (Symplektische Endomorphismen 2)
Sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum. Zeigen Sie: Eine lineare Abbildung $f : V \to V$ ist genau dann symplektisch, wenn

$$A^T J A \;=\; J$$

gilt. Hierbei sind $A_{ij} = f_i(e_j)$ und $J_{ij} = \omega(e_i, e_j)$ die darstellenden Matrizen von f und ω bzgl. einer beliebigen Basis $(e_i)_{i=1}^n$ von V.

Aufgabe 38 (Symplektische Torus-Abbildungen)
Der Torus $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ mit Koordinaten x, ξ modulo 2π (vgl. Aufgabe 13 und 17) und symplektischer Form $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}\xi$ (lokal) ist eine symplektische Mannigfaltigkeit. Wir nennen $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ symplektisch, falls $f^*\omega = \omega$, d.h. falls an jedem Punkt $\left(\begin{smallmatrix} x \\ \xi \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{T}^2$ gilt

$$\omega\big|_{F\left(\begin{smallmatrix} x \\ \xi \end{smallmatrix}\right)}\big(Tf(u), Tf(v)\big) = \omega\big|_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ \xi \end{smallmatrix}\right)}(u, v) \quad \forall\, u, v \in T_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ \xi \end{smallmatrix}\right)}\mathbb{T}^2\,,$$

vgl. 1.82 Definition des Pull-Back. Machen Sie sich klar, dass $f^*\omega = \omega \;\Leftrightarrow\; (Df)^T J Df = J$ (vgl. Aufgabe 37), mit der Jacobi-Matrix Df und $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Sei nun F die Standard-Abbildung aus Aufgabe 17 bzw. 13 (vgl. auch Aufgabe 2). Zeigen Sie: F ist symplektisch.

Aufgabe 39 (Magnetische Felder in der Hamiltonschen Mechanik 1)
Sei $V = T^*\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^6$ zunächst ausgestattet mit der kanonischen symplektischen Form

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{d}q^j \wedge \mathrm{d}p^j\,, \qquad \text{d.h.} \quad \omega_0\left(\left(\begin{smallmatrix} q \\ p \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \tilde q \\ \tilde p \end{smallmatrix}\right)\right) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} q \\ p \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} \tilde q \\ \tilde p \end{smallmatrix}\right) \right\rangle_{\mathbb{R}^6}\,,$$

und sei $B = (B_1, B_2, B_3) \in \mathbb{R}^3$ konstant. Wir betrachten die lineare Koordinatentransformation

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & \mathbb{R}^6 & \to & \mathbb{R}^6 \\ & \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} q \\ p + \frac{1}{2}\mathcal{B}q \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{mit} \quad \mathcal{B} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -B_3 & B_2 \\ B_3 & 0 & -B_1 \\ -B_2 & B_1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

Bestimmen Sie eine symplektische Form ω_B auf $\mathbb{R}^6$ so, dass $\Psi : (\mathbb{R}^6, \omega_0) \to (\mathbb{R}^6, \omega_B)$ eine symplektische Abbildung ist.