

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 12 (Besprechung am 25.01.2017)

Aufgabe 40 (Magnetische Felder in der Hamiltonschen Mechanik 2)

Seien V , ω_0 und $\mathcal{B}$ wie in Aufgabe 39. Die Hamiltonfunktion für ein geladenes Teilchen im konstanten Magnetfeld $B = (B_1, B_2, B_3)$ ist

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{2} \mathcal{B} q \right)^2 := \frac{1}{2} \langle p + \frac{1}{2} \mathcal{B} q, p + \frac{1}{2} \mathcal{B} q \rangle_{\mathbb{R}^3},$$

- a) Bestimmen Sie zugehörigen die Hamiltonschen Gleichungen bezüglich der symplektischen Form ω_0 .

Seien auch Ψ und ω_B wie in Aufgabe 39.

- b) Schreiben Sie die Hamiltonschen Gleichungen aus Teil (a) in den neuen Variablen $(\tilde{q}, \tilde{p}) := \Psi(q, p)$.
- c) Bestimmen Sie auch die Hamiltonschen Gleichungen zur Hamiltonfunktion $\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}) = \frac{1}{2} \tilde{p}^2$ bezüglich der symplektischen Form ω_B .

Aufgabe 41 (Die 2-Sphäre als symplektische Mannigfaltigkeit)

Machen Sie sich zunächst klar, dass $S^2 = \{s \in \mathbb{R}^3 \mid |s| = 1\}$ mit der Standard-Volumenform $\sigma = i_n \varepsilon^{(3)}$ (vgl. Aufgabe 34 bzw. Bemerkung 1.77) eine symplektische Mannigfaltigkeit ist. Sei $B \in \mathbb{R}^3$ und die Hamiltonfunktion $H : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$H(s) = B \cdot s$$

gegeben, wobei $\cdot$ das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichne. Berechnen Sie das zugehörige Hamiltonsche Vektorfeld in geeigneten Koordinaten. Zeigen Sie dann, dass die sich ergebenden Hamiltonschen Gleichungen äquivalent sind zu

$$\dot{s} = B \times s.$$

Wie sehen die Lösungen aus?

HINWEIS: Wählen Sie Kugelkoordinaten, am besten so, dass $H = |B| \cos \theta$.

Aufgabe 42 (Zeitentwicklung von Funktionen)

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit, seien $g, H \in C^\infty(M)$, und sei Φ_t^H der von X_H erzeugte Hamiltonsche Fluss. Zeigen Sie, dass $g(t) := g \circ \Phi_t^H$ die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = \{g(t), H\}$$

löst. Zeigen Sie weiter, dass $g(t) = g(0)$ falls $\{g, H\} = 0$.

Aufgabe 43 (Poissonklammer und kanonische Transformationen)

Seien M_1 und M_2 symplektische Mannigfaltigkeiten und $\psi : M_1 \rightarrow M_2$ eine kanonische Transformation. Zeigen Sie, dass

$$\psi^* (\{f, g\}_{M_2}) = \{\psi^* f, \psi^* g\}_{M_1}.$$

Aufgabe 44 (Noether-Theorem in der Hamiltonschen Mechanik)

Sei (P, ω) eine einfach zusammenhängende symplektische Mannigfaltigkeit, $H \in C^\infty(P)$ und Φ_t eine kontinuierliche Symmetrie des Systems, d.h. $t \mapsto \Phi_t$ ist ein Fluss auf P so, dass jedes Φ_t eine kanonische Transformation ist, welche H invariant läßt, d.h. $\Phi_t^* H = H \forall t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es eine zu Φ_t gehörige sogenannte Erhaltungsgröße gibt, also eine Funktion $F \in C^\infty(P)$ mit $\Phi_t = \Phi_t^{X_F}$ und $\{F, H\} = 0$.