Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler & Julian Schmidt Wintersemester 16/17

# Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 13 (Besprechung am 01.02.2017)

---

**Aufgabe 45 (Noether-Theorem 2: Symmetrien des Konfigurationsraums)**
Liftet man eine Symmetrietransformation des Konfigurationsraums $M$ auf den Phasenraum $T^*M$, so wirkt sie immer als kanonische Transformation. Zeigen Sie dazu: Sei $P = T^*M$ versehen mit der kanonischen symplektischen Form und $\phi_t$ ein Fluss auf $M$ (wir stellen uns hier die Gruppenwirkung einer Symmetriegruppe des Konfigurationsraumes $M$ vor). Zeigen Sie, dass $\Phi_t := T^*\phi_t$ dann ein Fluss auf $P$ ist und $\Phi_t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ eine kanonische Transformation ist. (Für die Schreibweise $T^*\phi_t$ siehe Definition 1.82 im Skript).

**Aufgabe 46 (Lagrangesche Untermannigfaltigkeiten und kanonische Transformationen)**
Sei $\psi : (M_1, \omega_1) \to (M_2, \omega_2)$ ein Diffeomorphismus von symplektischen Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass $\psi$ genau dann symplektisch ist, wenn der Graph von $\psi$,

$$\Gamma_\psi \;=\; \{\, \big(x, \psi(x)\big) \,|\, x \in M_1 \,\} \;\subset\; M_1 \times M_2\,,$$

eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit bzgl. der symplektischen Form $\Omega = \omega_1 \ominus \omega_2$ ist.

**Aufgabe 47 (Erzeugende Funktionen)**
Sei $M = \mathbb{R}^{2n}$ versehen mit der kanonischen symplektischen Form $\omega_0$ und sei $H(q,p) = \frac{1}{2}|p|^2$. Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $S_t$ der kanonischen Transformation

$$\Phi_t^{X_H} : (q,p) \mapsto (q + pt, p)$$

gegeben durch den Hamiltonschen Fluss für $t \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie dabei alle vier in der Vorlesung besprochenen Möglichkeiten $S_t$ darzustellen. Welche Darstellungen kommen für welche Zeiten infrage?

**Aufgabe 48 (Symmetrien und Erhaltungsgrößen)**
Wir verwenden die Notation und Begriffsbildung aus Aufgabe 44 und Aufgabe 45. Sei $M = \mathbb{R}^n$ der Konfigurationsraum und $P = T^*M$ der Phasenraum mit der kanonischen symplektischen Form $\omega_0 = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p^i$.

Auf $M$ operieren die Gruppe der Translationen in Richtung $a \in \mathbb{R}^n$ durch $\phi_t^a(q) = q + ta$ und die Gruppe der Rotationen um die Achse $b \in \mathbb{R}^n$ durch $\phi_t^b(q) = \mathrm{e}^{\sigma(b)t}q$, wobei $\sigma(b)^T = -\sigma(b)$ eine schiefsymmetrische reelle Matrix ist.

Bestimmen Sie die Erhaltungsgrößen $A, B \in C^\infty(P)$ auf $P$, die gemäß den Aufgaben 44 und 45 zu den Symmetrien $\phi_t^a$ und $\phi_t^b$ des Konfigurationsraums gehören.