Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler & Julian Schmidt Wintersemester 16/17

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Übungsblatt 14 (Besprechung am 08.02.2017)

Aufgabe 49 (Liouville-Torus als Lagrangesche Untermannigfaltigkeit)
Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit mit $\dim M = 2n$. Die Menge $\{F_1, ..., F_n\} \subset C^\infty(M)$ sei integrabel und $f \in \mathbb{R}^n$ sei regulärer Wert der Funktion $F := (F_1, ..., F_n) : M \to \mathbb{R}^n$, also

$$\mathrm{d}F_1(x) \wedge ... \wedge \mathrm{d}F_n(x) \neq 0 \qquad \text{für alle } x \in M_f := \{x \in M \,|\, F(x) = f\}.$$

Zeigen Sie, dass M_f eine Lagrangesche Untermannigfaltigkeit von M ist.

Aufgabe 50 (Lineare Bewegung auf dem 2-Torus)
Sei $\mathbb{T}^2 := S^1 \times S^1$ der 2-Torus und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$, $t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$. Es gelte

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 \qquad \text{und} \qquad \dot{\varphi}_2 = \omega_2.$$

für $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen:

(a) $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \varphi(t)$ ist periodisch, (b) $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q} \Leftrightarrow \{\varphi(t) | \, t \in \mathbb{R}\}$ liegt dicht in $\mathbb{T}^2$.

Aufgabe 51 (Rational abhängige Frequenzen)
Es definiere $\omega \in \mathbb{R}^n$ eine bedingt periodische Bewegung

$$\Phi_t^\omega : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n, \, \varphi \mapsto \varphi + t\omega \mod (2\pi\mathbb{Z})^n .$$

Zeigen Sie: Wenn es ein $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ mit $k \cdot \omega = 0$ gibt, dann existiert ein glattes $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ so, dass das Zeitmittel

$$\langle f \rangle_\varphi := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_t^{\omega\,*} f \,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi + \omega t) \,\mathrm{d}t$$

nicht konstant ist, also von φ abhängt.