Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 16/17

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe am 18.11.2016)

Aufgabe 25 (16 Punkte)

Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie ggf. die Ableitung.

a) $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ b) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ c) $f(x) = |x^2 - 16|$ d) $f(x) = x|x|$

Aufgabe 26 (9 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-6}{27-x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{256-x^8}{x^2-4}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{1-x}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Aufgabe 27 (keine Abgabe)

Wie Sie wissen gilt beim Ableiten die Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\big(fg\big)^{(n)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(\nu)}(x)\, g^{(n-\nu)}(x)\,.$$

Zur Erinnerung: $f^{(k)}(x)$ ist die $k$te Ableitung der Funktion $f(x)$ nach x, d.h. $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ etc.

Hinweis: Führen Sie eine vollständige Induktion nach n durch, und werfen Sie einen Blick auf den Beweis der Binomischen Formel (Satz 1).

Aufgabe 28 (10 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 11.12.16 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Derivative & the direction of a function*,
- *Visualizing derivatives*,
- *Polynomial functions differentiation*,
- *Tangents of polynomials* und
- *Basic differentiation rules*.

Hinweise: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).

Aufgabe 29 (keine Abgabe)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten im Folgenden stets die Asymptotik für $x \to x_0$. Sei weiter $f(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ und $g(x) = o\big((x-x_0)^m\big)$ mit $n, m \in \mathbb{N}_0$.

a) Zeigen Sie:[1]
$$f(x)\,g(x) = o\big((x-x_0)^{n+m}\big)\,.$$
Dafür schreiben wir kurz $o\big((x-x_0)^n\big)\,o\big((x-x_0)^m\big) = o\big((x-x_0)^{n+m}\big)$.

b) Zeigen Sie[2]
$$f(x) + g(x) \;=\; o\big((x-x_0)^{\min(n,m)}\big)\,.$$
Dafür schreiben wir kurz $o\big((x-x_0)^n\big) \;+\; o\big((x-x_0)^m\big) \;=\; o\big((x-x_0)^{\min(n,m)}\big)$.

Aufgabe 30 (5 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die Produktregel,
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,,$$
unter Verwendung der Charakterisierung der Ableitung mit Hilfe von Klein-o (Lemma 4).

[1] Denken Sie daran, wie wir in der Vorlesung gezeigt haben, dass $x^m\,o(x^n) = o(x^{n+m})$, $x \to 0$, was die Kurzschreibweise der folgenden Äuivalenz ist,
$$f(x) = o(x^n) \quad \Leftrightarrow \quad x^m\,f(x) = o(x^{n+m})\,,\; x \to 0\,.$$

[2] Dabei ist $\min(x_1, x_2, \dots, x_N)$ die kleinste der Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_N$, d.h. z.B. ist $\min(2, 0, 1, 3) = 0$.