Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 16/17

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe am 09.12.2016)

Aufgabe 43 (keine Abgabe)
Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\sinh x$ b) $\cosh x$ c) $\operatorname{Artanh} x$

um $x_0 = 0$. Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktion?
HINWEIS: Denken Sie bei (c) an die Herleitung der Taylorreihe von log in der Vorlesung.

Aufgabe 44 (5 Punkte)
Begründen Sie geometrisch, dass $\tan \frac{\pi}{4} = 1$. Leiten Sie daraus und mithilfe der arctan-Reihe eine Reihendarstellung für π her. Nennen Sie die Summe der ersten n Terme dieser Reihe π_n. Berechnen Sie (mit Taschenrechner oder Computer) π_{10}, π_{11} sowie $\frac{1}{2}(\pi_{10} + \pi_{11})$ und vergleichen Sie mit dem Ihnen bekannten Wert für π. Vergleichen Sie gerne auch mit π_{100}.

Aufgabe 45 (20 Punkte)
Berechnen Sie die Taylorreihen der Funktionen (ggf. stetig fortgesetzt)

a) $\dfrac{1 - \cos x}{x}$ b) $\dfrac{1}{(3 - x)(5 - x)}$ c) $\dfrac{\sin x}{1 - x^2}$

um Null, sowie die Taylorreihen von

d) e^x um $x_0 = -\pi$ und e) $\sin x$ um $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktionen?

Aufgabe 46 (9 Punkte)
Bestimmmen Sie die folgenden Grenzwerte (mit Erklärung/Herleitung)!

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\cos(2x) - 1)^6}{(x - \sin x)^4}$ b) $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} \, \log(-\log x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^{2000} \sin^{16} x}{(\mathrm{e}^{-x} - 1)^{2016}}$

Aufgabe 47 (keine Abgabe)
Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x|x| - 3 + x - x^2}{|x - 1|}$$

für reelle x. Achten Sie dabei insbesondere auf den (maximalen) Definitionsbereich, stetige Fortsetzbarkeit, Asymptoten, Nullstellen sowie Hoch- und Tiefpunkte, und zeichnen Sie die den Graph der Funktion.

Aufgabe 48 (6 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 15.01.17 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Function as a geometric series*,
- *Power series function representation* und
- *Maclaurin series for* $\sin x$, $\cos x$, *and* e^x

HINWEISE: (i) Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).
(ii) Die Taylor-Reihe um Null heißt auch Maclaurin-Reihe.