

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (Abgabe am 13.01.2017)

Aufgabe 61

(keine Abgabe)

Seien U und V Unterräume des $\mathbb{R}^{10}$ mit $\dim U = 7$ und $\dim V = 5$ sowie Basen $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_7$ von U und $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_5$ von V . Welche Werte kann

$$\dim \operatorname{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_7, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_5)$$

annehmen (mit Begründung)? Geben Sie für jeden Fall explizit ein Beispiel an (z.B. durch Angabe geeigneter $\vec{a}_j$ und $\vec{b}_j$)!

Aufgabe 62

(14 Punkte)

a) Bestimmen Sie eine ON-Basis für $U \subset \mathbb{R}^4$,

$$U = \operatorname{span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

b) Bestimmen Sie mithilfe des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens eine ON-Basis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts aus Aufgabe 60e. Beginnen Sie mit den l.u. Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 63

(keine Abgabe)

Gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ für beliebige $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 64

(10 Punkte)

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Wir betrachten das LGS

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 = \vec{b} \quad \text{für } x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, 3.$$

- Bilden Sie das Kreuzprodukt mit $\vec{a}_2$ von rechts und anschließend das Skalarprodukt des Ergebnisses mit $\vec{a}_3$. Lösen Sie nun – wenn möglich – nach x_1 auf.
- Beschaffen Sie sich analoge Lösungsformeln für x_2 und x_3 .
- Welche Bedingung müssen die $\vec{a}_j$ erfüllen, damit Sie mithilfe der Formeln aus a und b wirklich die Lösung des LGS erhalten?

Aufgabe 65

(6 Punkte)

Bestimmen Sie die hundertste Ableitung von $\frac{\sin x}{x}$ (wenn nötig stetig fortgesetzt) an der Stelle $x = 0$.

HINWEIS: Die Taylorreihe um Null ist hilfreich.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!