Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 16/17

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 12 (Abgabe am 20.01.2017)

Aufgabe 66 (keine Abgabe)

a) Die Lösungsmenge des folgenden LGS ist eine Ebene E_1 im $\mathbb{R}^3$,

$$3 + 2x_1 + 6x_2 = x_3\,.$$

Geben Sie eine Parameterdarstellung sowie die Hessesche Normalform dieser Ebene an. Welchen Abstand hat die Ebene vom Ursprung?

b) Die Ebene E_2 im $\mathbb{R}^3$ ist durch

$$E_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = s \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

definiert. Geben Sie die Hessesche Normalform dieser Ebene an und berechnen Sie die Schnittmenge von E_2 und E_1.

Aufgabe 67 (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Polardarstellung der folgenden Punkte (x, y) aus $\mathbb{R}^2$:

a) $(2, 1)$ b) $(1, -2)$ c) $(-3, 1)$ d) $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

Geben Sie die folgenden Punkte (x, y, z) aus $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) an:

e) $(\pi, 0, 0)$ f) $(0, 2, 0)$ g) $(1, 0, 1)$ h) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$

Aufgabe 68 (keine Abgabe)

Zeichnen Sie die folgende Kurve und berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}$,

$$\vec{x}(t) = \left(\tfrac{3}{2} + \cos(3t)\right) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Zeichnen Sie auch $\dot{\vec{x}}(0)$, $\dot{\vec{x}}(\frac{\pi}{6})$, und $\dot{\vec{x}}(\frac{\pi}{3})$ als Tangentialvektoren ein.
Hinweis: Als Hilfslinien sind Kreise mit Radien $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ und $\frac{5}{2}$ sinnvoll.

Aufgabe 69 (6 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 05.02.17 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Matrix elements*
- *Matrix equations: scalar multiplication*
- *Multiply matrices*

Hinweis: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).

Aufgabe 70 (10 Punkte)

Zeigen Sie: Die Einheitsvektoren für Kugelkoordinaten,

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

bilden (an jedem Punkt) (a) eine ONB des $\mathbb{R}^3$ und (b) ein Rechtssystem (in der angegebenen Reihenfolge). Berechnen Sie außerdem (c) die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten, d.h. berechnen Sie $\dot{\vec{x}}$ für

$$\vec{x}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \sin(\theta(t)) \cos(\phi(t)) \\ \sin(\theta(t)) \sin(\phi(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix},$$

und drücken Sie das Ergebnis als Linearkombination von $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ aus.

Aufgabe 71 [1] (10 Punkte)

Berechnen Sie – falls möglich – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) AA^T, b) A^TA, c) AA^TB, d) A^TAB,
e) B^TAA^T, f) A^2, g) A^TAA^TA.

HINWEIS: Assoziativität ist hilfreich.

[1] Diese Aufgabe wird nicht in den Übungsgruppen besprochen. Das Vergleichen von Ergebnissen und die Diskussion von Lösungswegen, z.B. im Webforum, ist aber erwünscht und wird unterstützt.