Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 16/17

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 13 (Abgabe am 27.01.2017)

Aufgabe 72 (9 Punkte)
Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie damit die Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, $X \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ und $Y \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ von

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \qquad AX = \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 4 & 7 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad AY = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Wie hätten Sie $\vec{x}$, X, oder Y bestimmen können, ohne zunächst A^{-1} zu berechnen?

Aufgabe 73 (10 Punkte)
Wir definieren die Potenz A^n einer quadratischen Matrix A durch

$$A^0 = I \text{ und } A^{n+1} = AA^n ,$$
$$\text{d.h.} \quad A^0 = I , \quad A^1 = A , \quad A^2 = AA , \quad A^3 = AAA , \ \ldots$$

Weiter definieren wir e^{Ax} für $x \in \mathbb{R}$ durch die bekannte Taylorreihe der e-Funktion, d.h. $e^{Ax} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$. Berechnen Sie e^{Ax} für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \pi & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Hinweise: (i) Berechnen Sie zunächst A^2 und A^3; raten Sie, wie A^n wohl aussieht, und beweisen Sie Ihre Vermutung. (ii) Aus der Matrixaddition (komponentenweise) folgt natürlich

$$\sum_n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n a_n & \sum_n b_n \\ \sum_n c_n & \sum_n d_n \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 74 (9 Punkte)
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^8$

Aufgabe 75 (10 Zusatzpunkte)

Seien $\alpha, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch

$$A = b \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $B_n := A^n$, $\det(B_n)$ und $(B_n)^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 76 (keine Abgabe)

Sei $G = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,\middle|\, A^T A = AA^T = I \right\}$ und sei $\cdot$ das Matrixprodukt.

a) Sind $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ in G?

b) Zeigen Sie: $(G, \cdot)$ ist eine Gruppe.

c) Ist $(G, \cdot)$ abelsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 77 (6 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 05.02.17 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Inverse of a* 3×3 *matrix*,
- *Determinant of a* 3×3 *matrix* und
- *Represent linear systems with matrix equations*.

Hinweis: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).